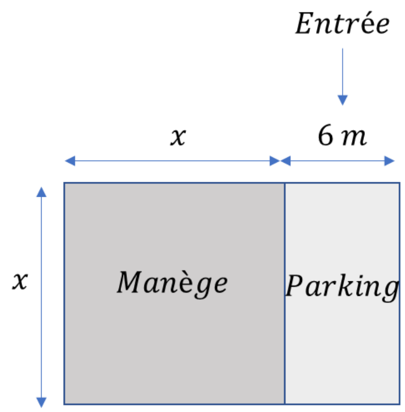
Résolution des équations polynômiales du second degré

1 Introduction à la problématique :

Un premier problème :

On souhaite aménager sur un terrain rectangulaire de $160\ m^2$ un espace pour des activités équestres. Cet espace doit être constitué d'une zone de forme carrée où se trouvera un manège et d'une zone rectangulaire servant de parking pour les visiteurs, l'entrée se faisant sur un des côtés du parking de largeur 6 m. Le schéma de l'aménagement, où on a noté x la longueur en mètres du côté du carré, est le suivant :

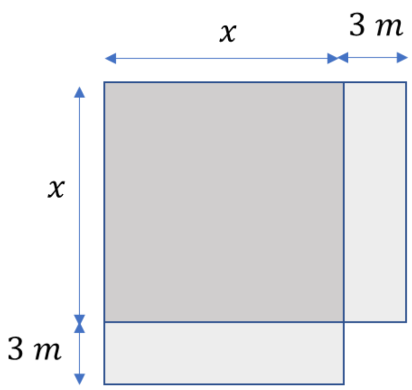


La mesure de l'aire du carré étant, en mètres-carré, x^2, celle du parking $6\,x$ et l'aire du terrain 160, notre problème consiste donc à trouver le nombre positif x tel que :

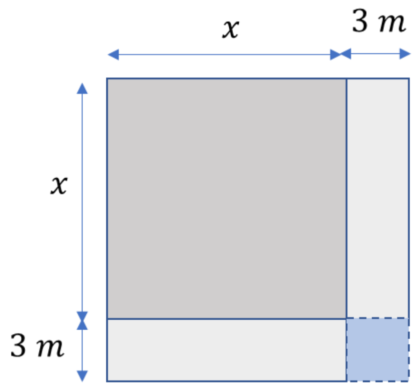
$$x^2 + 6\,x = 160$$

Voyons comment procéder en s'inspirant d'une méthode définie par les arabes dans un traité nommé **al-jabr** et qui donnera son nom à la branche des mathématiques appelée **algèbre**.

Tout d'abord, on crée un problème annexe plus symétrique, en découpant le parking en deux rectangles identiques dont un côté mesure $3\ m$. Le schéma de ce nouveau problème est le suivant :



La somme des aires des deux nouveaux rectangles et du carré fait toujours $160\ m^2$. Complétons alors la figure du petit carré manquant de $3\ m$ de côté afin d'en faire une figure carrée.



Le nouveau petit carré ayant une aire de 9 m^2, le grand carré a alors une aire égale à 169 m^2 $(160 + 9)$ donc un côté mesurant $\sqrt{169} = 13\ m$. Ainsi, la valeur de x est de $10\ m$ $(13 - 3)$. Vérifions :

$$10^2 + 6 \times 10 = 100 + 60 = 160$$

Formulation générale du premier problème :

Le premier problème peut se généraliser pour une largeur de l'entrée notée b et une surface totale quelconque notée c, où b et c sont deux nombres réels positifs quelconques. On cherche alors le nombre positif x satisfaisant l'équation :

$$\boxed{x^2 + b\,x = c}$$

On procède alors comme précédemment et pour ce faire, il est plus commode de noter b sous la forme $2\,b'$ où b' est sa moitié. L'équation s'écrit alors :

$$x^2 + 2\,b'\,x = c$$

Le petit rectangle additionnel de côté b' permet de former un grand carré de côté $x + b'$ et d'aire égale à $c + b'^2$. Ainsi :

$$x + b' = \sqrt{c + b'^2}$$

D'où :

$$\boxed{x = -b' + \sqrt{c + b'^2}}$$

Inconvénient de de la méthode de résolution employée :

La méthode de résolution que l'on vient de présenter est inspirée de la géométrie et présente à cet égard un inconvénient, elle ne donne que la solution positive de l'équation. Voilà pourquoi il va falloir l'améliorer, dès lors que l'on s'autorise à travailler également avec des nombre négatifs.

Reprenons en effet le premier problème et voyons comment s'inspirer de la méthode pour trouver la solution manquante :

On part de l'équation à résoudre

$$x^2 + 6\,x = 160$$

On dédouble le terme $6\,x$:

$$x^2 + 2 \times 3\, x = 160$$

On complète le premier membre et le second membre de l'aire du petit carré manquant, ce qui ne change pas les solutions de l'équation (on obtient une équation dite équivalente) :

$$x^2 + 2 \times 3\, x + 3^2 \; = 160 + 3^2$$

On constate ainsi que le premier membre est le développement d'une identité remarquable :

$$(x + 3)^2 = 169$$

Sachant qu'il y a deux nombres dont le carré vaut 169, qui sont 13 et -13, on en déduit que l'on a soit :

$$x + 3 = 13$$

ce qui conduit à la solution positive déjà obtenue, 10, soit :

$$x + 3 = -13$$

ce qui conduit à la solution négative :

$$x = -13 - 3 = -16$$

<u>2) Problématique générale :</u>

Une équation du second degré est une équation de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{a\, x^2 + b\, x + c = 0}}$$

où x est l'inconnue à déterminer et a, b, c trois nombres réels quelconques, a étant non nul.

Avant d'aborder la résolution générale de telles équations, prenons quelques exemples :

<u>Cas où c est nul</u> :

Prenons cet exemple :

$$3\, x^2 + 2\, x = 0$$

En factorisant par x on obtient une équation équivalente :

$$x\,(3\, x + 2) = 0$$

Or un produit de deux nombres est nuls lorsque et seulement dans ce cas, l'un des deux nombres est nul ou bien les deux. Les solutions sont donc données par :

$$x = 0$$

ou :

$$3\, x + 2 = 0$$

laquelle équivaut à :

$$x = -\frac{2}{3}$$

Cas où b est nul :

Prenons cet exemple :

$$3\,x^2 - 2 = 0$$

Cette équation équivaut à :

$$3\,x^2 = 2$$

Ou encore à :

$$x^2 = \frac{2}{3}$$

Ce qui donne les deux solutions :

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

et :

$$x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Cas où ni b ni c ne sont nuls

Prenons cet exemple :

$$2\,x^2 + 6\,x + 1 = 0$$

En divisant par 2, on obtient une équation équivalente sans coefficient multiplicateur sur le terme en x^2:

$$x^2 + 3\,x + \frac{1}{2} = 0$$

En passant le troisième terme dans le second membre :

$$x^2 + 3\,x = -\frac{1}{2}$$

En dédoublant le second terme, on obtient :

$$x^2 + 2 \times \frac{3}{2}\,x = -\frac{1}{2}$$

En complétant les deux premiers termes par le terme manquant pour faire une identité remarquable :

$$x^2 + 2 \times \frac{3}{2}\,x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

En factorisant le premier membre et en simplifiant le second :

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{2}{4} + \frac{9}{4}$$

Soit :

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$$

Nous avons donc deux solutions :

Soit :

$$x+\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{7}{4}}$$

donc une première solution :

$$x=\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$$

Soit :

$$x+\frac{3}{2}=-\sqrt{\frac{7}{4}}$$

donc une seconde solution :

$$x=\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$$

3) Résolution générale :

La méthode présentée précédemment permet de résoudre tous les types d'équations du second degré. Cependant, elle est un peu longue de mise en œuvre. Aussi allons-nous la reprendre avec des paramètres a, b, c sans leur donner de valeurs particulières afin de faire apparaitre des formules intéressantes à mémoriser.

Rappelons l'équation de départ :

$$a\,x^2+b\,x+c=0$$

Le premier membre est qualifié de trinôme en la variable x, c'est-à-dire une expression formée d'un terme du second degré $a\,x^2$, appelé encore monôme d'ordre 2, d'un terme du premier degré $b\,x$, appelé monôme d'ordre 1 et d'un terme constant c appelé monôme d'ordre 0 (car $c=c\,x^0$).

On commence par diviser l'équation par a :

$$x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{c}{a}=0$$

On dédouble le second terme et on passe le terme constant dans le second membre :

$$x^2+2\,\frac{b}{2\,a}\,x=-\frac{c}{a}$$

On ajoute à chaque membre le terme manquant pour faire une identité remarquable dans le premier membre :

$$x^2 + 2\ \frac{b}{2\ a}\ x + \left(\frac{b}{2\ a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2\ a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

On factorise le premier membre et on simplifie le second :

$$\left(x + \frac{b}{2\ a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4\ a\ c}{4\ a^2}$$

L’existence de solutions dépend alors du signe d’une quantité appelée discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4\ a\ c$$

Si ce discriminant est strictement négatif, il n’y a pas de solutions.

Si ce discriminant est nul, il n’y a qu’une solution, celle qui satisfait l’équation :

$$x + \frac{b}{2\ a} = 0$$

Soit :

$$\boxed{x = -\frac{b}{2\ a}}$$

Si ce discriminant est strictement positif alors l’équation devient :

$$\left(x + \frac{b}{2\ a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\ a}\right)^2$$

Et elle a deux solutions.

La première vérifie :

$$x + \frac{b}{2\ a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\ a}$$

Soit :

$$\boxed{x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\ a}}$$

Et la seconde :

$$x + \frac{b}{2\ a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\ a}$$

Soit :

$$\boxed{x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\ a}}$$