Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées, et l'on pose :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

(M_0 et M_2 sont donc des nombres réels tels que, pour tout x réel, on a $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$). Le but de cet exercice est de prouver que f' est bornée, et de majorer $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ en fonction de M_0 et M_2. Soit $x \in \mathbb{R}$, et $h > 0$.

1. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x et $x + h$ à l'ordre 2.
2. En déduire l'inégalité :

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

En particulier, si on choisit $h = 1$, on obtient $|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$, ce qui prouve que f' est bornée, avec $M_1 \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$. On se propose de trouver une meilleure majoration :
3. Etudier la fonction $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire $M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

Réponses :

1) le théorème de Taylor Lagrangel indique qu' il existe $c(x,h) \in \,]x; x+h[$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(c(x,h))$$

2) Donc :

$$h\,f'(x) = f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2}\,f''(c(x,h)$$

et :

$$|h\,f'(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| + \left|\frac{h^2}{2}\,f''(c(x,h)\right|$$

Donc :

$$h\,|f'(x)| \leq M_0 + M_0 + \frac{h^2}{2} M_2$$

finalement

$$|f'(x)| \leq \frac{2\,M_0}{h} + \frac{h\,M_2}{2}$$

3) On pose $g(h) = \frac{2\,M_0}{h} + \frac{h\,M_2}{2}$ alors :

$$g'(h) = -\frac{2\,M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2} = \frac{M_2\,h^2 - 4\,M_0}{2\,h^2}$$

g' s'annule en h_0 tel que :

$$h_0 = 2\sqrt{M_0\,M_2}$$

Et $g' > 0$ sur $[0; h_0[$, $g' < 0$ sur $]h_0; +\infty[$ donc g est strictement croissante sur $[0; h_0]$ et strictement décroissante sur $[h_0; +\infty[$

4) donc g présente un maximum en h_0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$: :

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0\,M_2}$$

Donc :

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0\,M_2}$$