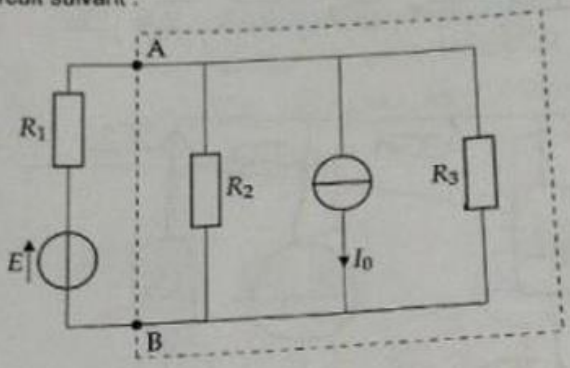
Exercice 2

On étudie le circuit suivant :



Analyse qualitative (sans calcul) :

1) Combien y a-t-il de valeurs d'intensité dans ce circuit ?
2) Déterminer, si possible, le sens conventionnel du courant dans les différentes branches. Justifier votre démarche avec des schémas clairs.

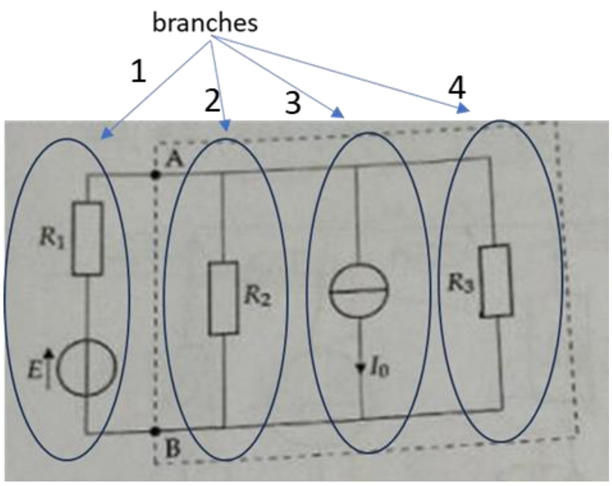
Analyse quantitative (avec calcul) :

3) Refaire le schéma en indiquant clairement le sens des courants, et le sens des tensions dans les résistances.
4) Combien y a-t-il d'inconnues indépendantes dans votre problème ?
5) Utiliser les lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles) pour obtenir autant d'équations que nécessaire.
6) Résoudre le système d'équations pour déterminer l'expression de l'intensité du courant circulant dans la résistance R_1.
7) Déterminer l'expression de l'intensité du courant circulant dans la résistance R_2.
8) Déterminer l'expression de l'intensité du courant circulant dans la résistance R_3.

Equivalence Thévenin – Norton

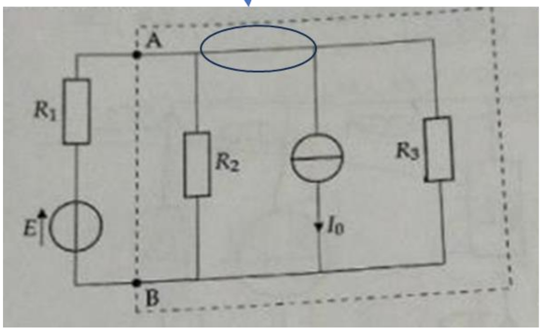
9) Déterminer le modèle de Thévenin équivalent au dipôle AB à droite des points A et B (encadré en pointillé sur le schéma).
10) A l'aide du modèle de Thévenin trouvé précédemment, retracer le schéma du circuit complet, puis déterminer l'expression littérale de l'intensité du courant circulant dans la branche du générateur de tension E.

1) On compte le nombre de branches , une branche étant définie comme un ensemble maximal de dipôles en séries (une branche doit donc contenir au moins un dipôle). Il y a 4 branches dans ce circuit, donc quatre valeurs d'intensités dont une fait partie des données (I_0)



Attention !!!! un fil de connexion n'est pas une branche à lui tout seul :

Ce n'est pas une branche



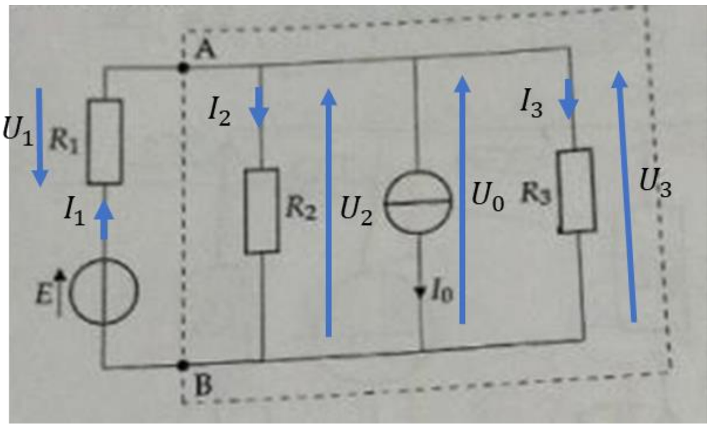
2) Dans la branche 1, le courant est positif dans le sens de E car le dipôle fonctionne en générateur. On le note I_1. Dans la deuxième branche et la troisième branche, il y a conflit entre le générateur de tension et le générateur de courant qui tendent à faire passer des courants en sens inverses. En effet, plaçons nous dans deux cas limites :

 <u>Premier cas</u> : $E > 0; \ I_0 = 0$ les courants dans R_2et R_3 sont positifs dans le sens allant de haut en bas.
 <u>Second cas</u> : $E = 0; \ I_0 > 0$ les courants dans R_2et R_3 sont positifs dans le sens allant de bas en haut.

 On ne peut donc pas savoir a priori dans quels sens seront ces courants notés respectivement I_2et I_3. On les lit donc dans un sens arbitraire, nous avons choisi de haut en bas mais on aurait pu faire l'inverse et même des orientations contraires.

 Le sens des tensions dans les résistances sera celui les représentant en convention récepteur, afin de pouvoir écrire facilement la loi d'Ohm

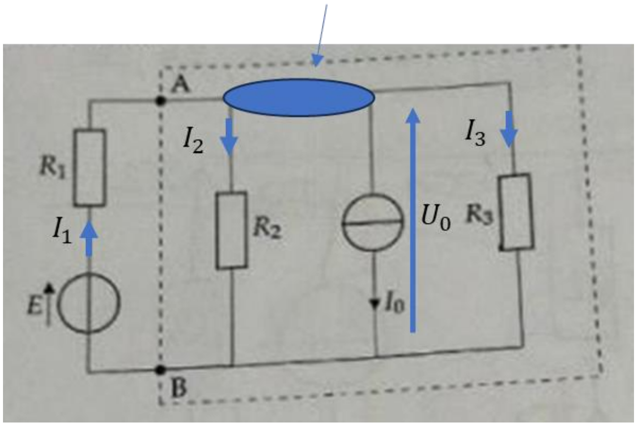
3)



4) Les inconnues (de tension et d'intensité) sont $I_1, I_2, I_3, U_0, U_1, U_2, U_3$, mais les trois dernières dépendent des trois premières par la loi d'Ohm. Il y a donc 4 inconnues indépendantes qui sont I_1, I_2, I_3, U_0

5) Il n'y a qu'un noeud indépendant. !!!! Un nœud n'est pas nécessairement représenté par un point mais plus généralement par une zone où arrivent plusieurs branches, ici quatre.

Noeud



La loi de ce nœud traduit que la somme des intensités lues dans le sens allant vers ce nœud est égale à la somme des intensités lues dans le sens partant de ce nœud, ce qui donne :

$$\boxed{I_1 = I_2 + I_3 + I_0}$$

Il y a trois mailles indépendantes. Nous pouvons donc écrire 3 équations de maille, ce qui donne :

Maille 1 (à gauche) : $U_1 + U_2 - E = 0$ soit exprimée en fonction des inconnues indépendantes :

$$\boxed{R_1\, I_1 + R_2\, I_2 - E = 0}$$

Maille 2 (au milieu) : $U_2 - U_0 = 0$ soit

$$\boxed{R_2\, I_2 - U_0 = 0}$$

Maille 3 (à droite) : $U_3 - U_0 = 0$ soit

$$\boxed{R_3\, I_3 - U_0 = 0}$$

6)

7)

8)

Mis sous forme de système avec les données des générateurs en second membre, le problème devient :

$$\boxed{\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = I_0 \\ R_1\, I_1 + R_2\, I_2 = E \\ R_2\, I_2 - U_0 = 0 \\ R_3\, I_3 - U_0 = 0 \end{cases}}$$

C'est donc un système à 4 équations indépendantes à 4 inconnues, il peut donc se résoudre comme suit :

On exprime I_1 en fonction des autres inconnues par la première équation :

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_0$$

Et on élimine U_0 entre les deux dernières ce qui aboutit au sous-système :

$$\begin{cases} R_2\, I_2 = R_3\, I_3 \\ R_1\, (I_2 + I_3 + I_0) + R_2\, I_2 = E \end{cases}$$

qu'on résout en substituant dans la seconde équation :

$$I_3 = \frac{R_2}{R_3}\, I_2$$

ce qui donne :

$$R_1\, \left(I_2 + \frac{R_2}{R_3}\, I_2 + I_0 \right) + R_2\, I_2 = E$$

On la multiplie ensuite par R_3 et on développe, ce qui donne :

$$R_1\, R_3\, I_2 + R_1\, R_2\, I_2 + R_2\, R_3\, I_2 + R_1\, R_3\, I_0 = R_3\, E$$

Finalement :

$$\boxed{I_2 = \frac{R_3\, (E - R_1\, I_0)}{R_1\, R_3 + R_1\, R_2 + R_2\, R_3}}$$

On en déduit les autres inconnues :

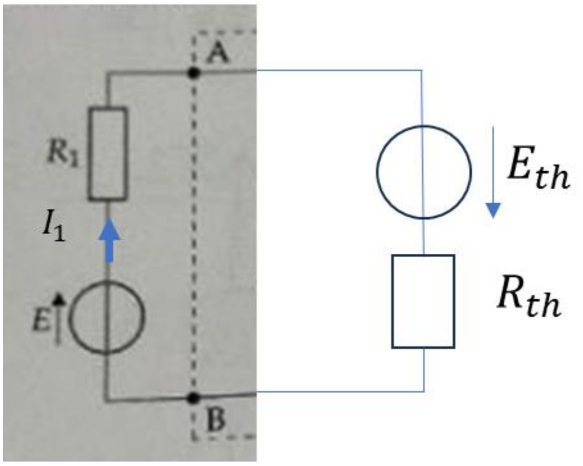
$$\boxed{I_3 = \frac{R_2\, (E - R_1\, I_0)}{R_1\, R_3 + R_1\, R_2 + R_2\, R_3}}$$

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\, (E - R_1\, I_0)}{R_1\, R_3 + R_1\, R_2 + R_2\, R_3} + I_0$$

$$\boxed{I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\, E + R_2\, R_3\, I_0}{R_1\, R_3 + R_1\, R_2 + R_2\, R_3}}$$

<u>Remarques</u> : les résultats sont cohérents avec les observations précédentes, à savoir que I_2 et I_3 sont strictement positifs si $E > R_1\, I_0$ et strictement négatifs dans le cas contraire et que I_1 est toujours strictement positif.

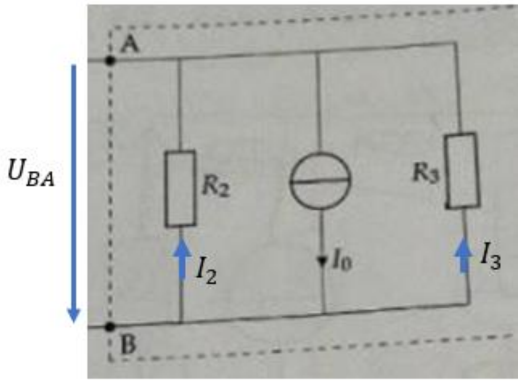
9) Le schéma équivalent est le suivant



Première étape : Calcul de la force électromotrice de Thévenin. Pour cela, on ouvre le circuit en A. On a alors :

$$E_{th} = U_{BA}$$

Or le dipôle réel représenté par le générateur de Thévenin est le suivant :



Nous pouvons calculer I_2 (qui n'est pas le même que précédemment) en appliquant un pont diviseur de courant :

$$I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3}\, I_0$$

La loi d'Ohm de R_2 donne alors :

$$U_{BA} = R_2\, I_2$$

Ainsi :

$$\boxed{E_{th} = \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}\, I_0}$$

Seconde étape : Calcul de la résistance de Thévenin. Pour cela, on éteint les forces électromotrices , c'est-à-dire celle associée au générateur de courant, mais il faut bien réfléchir comment. Un générateur de courant peut être vu comme un générateur idéal de force électromotrice très grande

E_∞ (devant les autres tensions mises en jeu) mise en série avec une résistance très grande R_∞ auquel cas la loi intensité tension s'écrit en convention générateur :

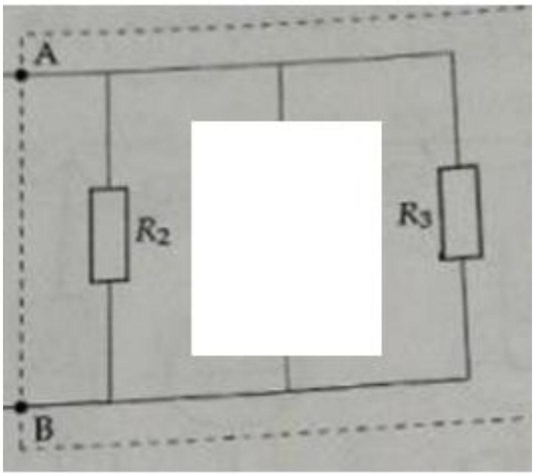
$$U = E_\infty - R_\infty\, I$$

Soit :

$$I = \frac{E_\infty}{R_\infty} - \frac{U}{R_\infty} \approx \frac{E_\infty}{R_\infty} = I_0$$

Mettre la fém à 0 consiste donc à annuler E_∞ce qui remplace le générateur de courant par une résistance infinie. Cela revient donc à enlever le générateur de courant.

La résistance de Thévenin est donc la résistance du dipôle suivant :



Lequel est formé de deux résistances en parallèle, donc :

$$\boxed{R_{th} = \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}}$$

Il reste à exploiter la loi de la maille unique définie par le schéma équivalent (ou d'utiliser la loi de Pouillet ce qui va plus vite) :

$$R_1\, I_1 - E_{th} + R_{th}\, I_1 - E = 0$$

Ce qui donne (c'est d'ailleurs la loi de Pouillet !!!) :

$$\boxed{I_1 = \frac{E + E_{th}}{R_1 + R_{th}}}$$

Ainsi :

$$I_1 = \frac{E + \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}\, I_0}{R_1 + \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}}$$

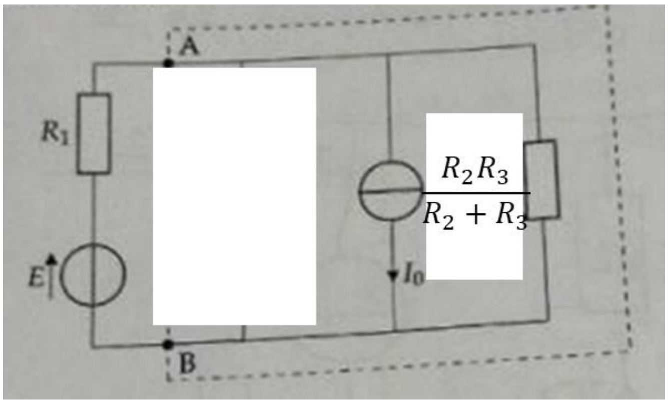
Soit finalement :

$$\boxed{I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\, E + R_2\, R_3\, I_0}{R_1\, R_3\ + R_1\, R_2\ + R_2\, R_3}}$$

On retrouve bien la même expression que précédemment :

Analyse critique de la méthode :

Il y a beaucoup plus simple et plus rapide pour résoudre cet exercice. En effet, on note que R_2 et R_3 sont en parallèle donc peuvent être remplacées par une résistance équivalente, ce qui donne le nouveau schéma :



Ensuite, on constate qu'on a un générateur de Norton à droite qu'on peut transformer en générateur de Thévenin par :

$$R_{th} = \frac{R_2\,R_3}{R_2+R_3}; \qquad E_{th} = R_{th}\,I_0 = \frac{R_2\,R_3}{R_2+R_3}\,I_0$$

et on applique la loi de Pouillet :

$$I_1 = \frac{somme\ des\ f\acute{e}m\ alg\acute{e}briques\ lues\ dans\ le\ sens\ de\ I_1}{somme\ des\ r\acute{e}sistances}$$

Et voilà, c'est plié en 3 lignes et sans prise de tête.

Moralité !!! savoir remplacer des circuits par des circuits équivalents en utilisant les formules de résistances équivalentes série et (ou dérivation) et savoir passer du modèle de Norton à Thévenin et vice versa.