Exercice 91 - (♣)
On considère l'application de la variable réelle à valeurs réelles définie sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$$

1) Montrer que f est correctement définie sur $]-1,1[$.

2) Montrer que :

$$f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln(x)}}$$

Réponse :

1) On a :

pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n^2 \geq n$ et pour tout $x \in]-1;1[$: $Ln(x) < 0$ donc $n^2\, Ln(x) \leq n\, Ln(x)$ et :

$$e^{n^2\, Ln(x)} \leq e^{\,n\, Ln(x)}$$

donc

$$0 \leq x^{n^2} \leq x^n$$

Or la série géométrique de terme général x^n converge donc par comparaison, la série de terme général x^{n^2} converge.

2) Considérons àx fixé la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(t) = x^{t^2} = e^{t^2\, Ln(x)}$$

Cette fonction est positive, décroissante et tend vers 0 en $+\infty$. On a donc pour tout entier naturel $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} g(t)\, dt \leq g(k) \leq \int_{k-1}^{k} g(t)\, dt$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} g(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{n} g(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} g(t)\, dt$$

Donc :

$$\int_1^{n+1} g(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{n} g(k) \leq \int_0^{n} g(t)\, dt$$

$$\int_1^{n+1} e^{t^2\, Ln(x)}\, dt \leq \sum_{k=1}^{n} x^{k^2} \leq x + \int_0^{n} e^{t^2\, Ln(x)}\, dt$$

Et en faisant tendre n vers l'infini :

$$\int_1^{+\infty} e^{t^2\,Ln(x)}\,dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2} \leq x + \int_0^{+\infty} e^{t^2\,Ln(x)}\,dt$$

Faisons pour les intégrales le changement de variable : $u = t\,\sqrt{-Ln(x)}$, $du = dt\,\sqrt{-Ln(x)}$ alors :

$$\frac{1}{\sqrt{-Ln(x)}}\int_{\sqrt{-Ln(x)}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2} \leq x + \frac{1}{\sqrt{-Ln(x)}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$$

On rappelle que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc :

$$\int_{\sqrt{-Ln(x)}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du \leq \sqrt{-Ln(x)}\sum_{k=1}^{n} x^{k^2} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Or :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\int_{\sqrt{-Ln(x)}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \int_0^{+\infty} e =^{-u^2}\ du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc en $x = 1^-$:

$$\sqrt{-Ln(x)}\sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Et finalement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\sqrt{-Ln(x)}}$$