Enoncé :

On considère la série suivante :

$$\boldsymbol{T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{2\,k}{k}\,k^2}}$$

Et on note R_n son reste de rang n à savoir :

$$\boldsymbol{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2\,k}{k}\,k^2}}$$

1) **Justifier la convergence de cette série**
2) **Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:**

$$\boldsymbol{\binom{2\,k}{k} \geq 2^k}$$

3) **En déduire par une majoration de R_n que :**

$$\boldsymbol{R_n = o\left(\frac{1}{n\,2^n}\right)}$$

4) **Exprimer le terme général de la série T_n sous une forme faisant apparaitre des factoriels**
5) **On pose pour $(k, p) \in \mathbb{N}^*$:**

$$\boldsymbol{a_{k\,p} = \frac{(k-1)!}{(k+p-1)!}}$$

Montrer que :

$$\boldsymbol{p\,a_{k\,p+1} = a_{k\,p} - a_{k+1\,p}}$$

Et en déduire pour $n \geq 1$:

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} a_{k\,p+1} = \frac{1}{p\,p!} - \frac{n!}{p\,(n+p)!}}$$

Et pour $n \geq p+1$:

$$\boldsymbol{\sum_{k=p+1}^{n} a_{k\,p+1} = \frac{(p-1)!}{(2\,p)!} - \frac{n!}{p\,(n+p)!}}$$

6) **On pose :**

$$\boldsymbol{u_n = \sum_{1 \leq k, p \leq n}^{n} \frac{(k-1)!\,(p-1)!}{(k+\,p)!}}$$

Exprimer u_n de deux façons différentes, la première à l'aide des $a_{k\,p+1}$, la seconde en exprimant la somme double sous la forme de deux termes, le premier étant la somme des termes pour lesquels $k = p$ et le second, la somme des termes pour lesquels $k < p$.

7) **Montrer que :**

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=p+1}^{n}\frac{(p-1)!\,n!}{p\,(n+\,p)!}=0$$

8) **En déduire que :**

$$3\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\binom{2\,k}{k}\,k^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

On rappelle par ailleurs que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\binom{2\,k}{k}\,k^2}$$

Réponses :

1) On a pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\binom{2\,k}{k}\geq 1$$

Donc :

$$\binom{2\,k}{k}k^2\ \geq k^2$$

$$\frac{1}{\binom{2\,k}{k}\,k^2}\leq\frac{1}{k^2}$$

Par comparaison, la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ étant convergente, la série à terme positifs T_n l'est aussi.

2) <u>Première méthode</u> :

$$\binom{2\,k}{k}=\frac{2\,k\,(2\,k-1)\dots(2k-(k-1)}{k\,(k-1)\dots(k-(k-1))}=\prod_{m=0}^{k-1}\frac{2\,k-m}{k-m}$$

Or pour tout $m\in[\![1;k]\!]$: $2\,k-m\geq 2\,k-2\,m=2\,(k-m)$ donc :

$$\binom{2\,k}{k}\geq\prod_{m=0}^{k-1}2=2^k$$

<u>Deuxième méthode</u> : Par récurrence sur k :

<u>Initialisation</u> : Pour $k=0$ et $k=1$ la propriété est vérifiée

<u>Hérédité</u> : Supposons que l'on ait pour un entier $k \geq 1$: $\binom{2\,k}{k} \geq k$ alors :

$$\binom{2\,k+2}{k+1} = \binom{2\,k+1}{k+1} + \binom{2\,k+1}{k} = \binom{2\,k}{k+1} + \binom{2\,k}{k} + \binom{2\,k}{k} + \binom{2\,k}{k-1}$$

Donc :

$$\binom{2\,(k+1)}{k+1} \geq \binom{2\,k}{k} + \binom{2\,k}{k} \geq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$$

La propriété est donc vraie pour l'entier $k+1$

3) On a pour tout entier $k \geq n+1$:

$$\binom{2\,k}{k}\,k^2 \geq 2^k\,(n+1)^2$$

Donc :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2\,k}{k}\,k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k\,(n+1)^2} = \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n\,(n+1)^2}$$

Donc :

$$\boxed{|n\,2^n\,R_n| \leq \frac{n}{(n+1)^2}}$$

Or :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0$$

Donc par comparaison :

$$\lim_{n\to\infty} n\,2^n\,R_n = 0$$

Et :

$$\boxed{R_n = o\left(\frac{1}{n\,2^n}\right)}$$

4) On a :

$$\boxed{\frac{1}{\binom{2\,k}{k}\,k^2} = \frac{1}{\frac{(2\,k)!}{k!\,k!}\,k^2} = \frac{k!\,k!}{(2\,k)!\,\,k\,k} = \frac{(k-1)!\,(k-1)!}{(2\,k)!} = \frac{(k-1)!^2}{(2\,k)!}}$$

5) On a :

$$a_{k\,p} - a_{k+1\,p} = \frac{(k-1)!}{(k+p-1)!} - \frac{k!}{(k+p)!} = \frac{(k+p)\,(k-1)! - k!}{(k+p)!} = \frac{k! + p\,(k-1)! - k!}{(k+p)!}$$

$$= p\,\frac{(k-1)!}{(k+p)!} = p\,a_{k\,p+1}$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{k\,p+1} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k\,p} - a_{k+1\,p}\right) = \frac{1}{p}\left(a_{1\,p} - a_{n+1\,p}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!}\right) = \frac{1}{p\,p!} - \frac{n!}{p\,(n+p)!}}$$

$$\boxed{\sum_{k=p+1}^{n} a_{k\,p+1} = \frac{1}{p}\left(a_{(p+1)\,p} - a_{n+1\,p}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{p!}{(2\,p)!} - \frac{n!}{(n+p)!}\right) = \frac{(p-1)!}{(2\,p)!} - \frac{n!}{p\,(n+p)!}}$$

6) Première façon :

$$u_n = \sum_{p=1}^{n}(p-1)!\sum_{k=1}^{n} a_{k\,p+1} = \sum_{p=1}^{n}(p-1)!\left(\frac{1}{p\,p!} - \frac{n!}{p\,(n+p)!}\right)$$

$$u_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{(p-1)!}{p\,p!} - \sum_{p=1}^{n}\frac{(p-1)!\,n!}{p\,(n+p)!}$$

$$\boxed{u_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{n}\frac{(p-1)!\,n!}{p\,(n+p)!}}$$

Deuxième façon : Par symétrie :

$$u_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{(p-1)!^2}{(2\,p)!} + 2\sum_{1\le k<p\le n}\frac{(k-1)!\,(p-1)!}{(k+\,p)!}$$

$$u_n = T_n + 2\sum_{p=1}^{n-1}(p-1)!\sum_{k=p+1}^{n}\frac{(k-1)!}{(k+\,p)!}$$

$$u_n = T_n + 2\sum_{p=1}^{n-1}(p-1)!\sum_{k=p+1}^{n} a_{k\,p+1}$$

$$u_n = T_n + 2\sum_{p=1}^{n-1}(p-1)!\left(\frac{(p-1)!}{(2\,p)!} - \frac{n!}{p\,(n+p)!}\right)$$

$$u_n = T_n + 2\sum_{p=1}^{n-1}\frac{(p-1)!^2}{(2\,p)!} - 2\sum_{p=1}^{n}\frac{(p-1)!\,n!}{p\,(n+p)!}$$

$$\boxed{u_n = T_n + 2\,T_{n-1} - 2\sum_{p=1}^{n}\frac{(p-1)!\,n!}{p\,(n+p)!}}$$

7) On a :

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{(p-1)!\,n!}{p\,(n+p)!} = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p\,(n+p)}\,\frac{(p-1)!\,n!}{(n+p-1)!} = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p\,(n+p)}\,\frac{1}{\binom{n+p-1}{n}}$$

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(p-1)!\, n!}{p\,(n+p)!} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p\,(n+p)} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p\, n} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

Or pour tout $p \geq 2$ on a pour tout $x \in [p-1; p]$:

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{x}$$

Donc :

$$\frac{1}{p} = \int_{p-1}^{p} \frac{1}{p}\, dx \leq \int_{p-1}^{p} \frac{1}{x}\, dx$$

Et par sommation :

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\, dx = Ln(n)$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} \frac{(p-1)!\, n!}{p\,(n+p)!} \leq \frac{1}{n}\,(1 + Ln(n))}$$

Or :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,(1 + Ln(n)) = 0$$

Donc par comparaison :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{(p-1)!\, n!}{p\,(n+p)!} = 0$$

8) On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} T_n + 2 \lim_{n\to\infty} T_n = 3 \lim_{n\to\infty} T_n$$

D'où :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2\,k}{k}\, k^2} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{18}}$$