Etude d'un mouvement parabolique dans le repère de Frénet

Nous allons étudier deux mouvements dont la trajectoire est une parabole connue a priori à la différence du cas du lancer d'un projectile préalablement étudié, ceci afin de mettre en évidence l'intérêt d'analyser de tels mouvements dans le repère de Frénet plutôt qu'un repère cartésien absolu.

Nous commencerons pour cela par définir quelques éléments géométriques propres à la parabole.

Nous étudierons ensuite deux mouvements, celui d'une bille roulant sur une courbe parabolique située dans un plan vertical puis celui d'un véhicule de manège forain roulant à vitesse constante sur un guide horizontal en forme de parabole.

Partie I : Calcul de rayons de courbure et tracé de centres de courbure sur une parabole

On considère dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la parabole d'équation : $y = x^2$.

Q1) Déterminer les coordonnées d'un vecteur tangent $\vec{u}$ et d'un vecteur normal $\vec{v}$ à la courbe aux points d'abscisse 0 et 1. Tracer ces vecteurs sur la figure de l'annexe.

$$\vec{u}(0) = 1\,\vec{\imath} + f'(0)\,\vec{\jmath} = 1\,\vec{\imath}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{\jmath}$$

$$\vec{u}(1) = 1\,\vec{\imath} + f'(1)\,\vec{\jmath} = 1\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{v}(1) = -2\,\vec{\imath} + 1\,\vec{\jmath}$$

Q2) Calculer les rayons de courbure de la courbe aux points d'abscisse 0 et 1.

$$f''(x) = 2$$

$$r(0) = \frac{1}{f''(0)} = \frac{1}{2}$$

$$r(1) = \frac{(1 + f'(1)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(1)} = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2} \approx 2{,}60$$

Partie II : Mouvement d'une bille sur un guide parabolique

On s'intéresse au mouvement du centre de gravité d'une boule de masse 10 kg sur la parabole précédente dont le repère est situé dans un plan vertical et avec pour unité le mètre. La boule peut rouler sans frottement sur son guide parabolique depuis la position d'abscisse -2 où elle a été lâchée sans vitesse initiale.

Q3) La courbe étant orientée dans le sens des x croissants, tracer sur la figure de l'annexe, les repères de Frénet aux abscisses 0 et 1.

Q4) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer la norme du vecteur vitesse quand la boule passe aux points d'abscisse 0 puis d'abscisse 1.

Le système conserve son énergie mécanique car seul le poids travaille, donc :

$$\frac{1}{2}\, m\, v(0)^2 = m\, g\, y(-2)$$

$$v(0)^2 = 2\, g\, f(-2)$$

$$v(0) = \sqrt{2\, g\, f(-2)} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 4} = 8{,}85\; m\, s^{-1}$$

Q5) Faire le bilan des forces agissant sur la boule au point d'abscisse 0 puis exprimer la seconde loi de Newton dans le repère de Frénet et en déduire les coordonnées de la réaction de sol $\vec{R}$ sur la boule ainsi que sa norme (On donnera une expression littérale puis on fera l'application numérique).

Les forces agissant sont le poids de la boule et la réaction normale du sol, soit :

$$\vec{R} = R\, \vec{j}, \qquad \vec{P} = -m\, g\, \vec{j}$$

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\, \vec{a}$$

Le base de Frénet au point O se confondant avec la base du repère orthonormé, on a :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\, \vec{\imath} + \frac{v^2}{r(0)}\, \vec{j}$$

Donc :

$$(R - m\, g)\, \vec{j} = m\frac{dv}{dt}\, \vec{\imath} + m\frac{v^2}{r(0)}\, \vec{j}$$

Par identification des coordonnées, on en déduit :

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = 0 \\ R - m\, g = m\dfrac{v^2}{r(0)} \end{cases}$$

La seconde relation donne :

$$R = m\, g + m\frac{v^2}{r(0)} = m\left(g + \frac{v^2}{r(0)}\right)$$

Soit numériquement :

$$R = 10 \times \left(9{,}81 + \frac{8{,}85^2}{0{,}5}\right) = 1665\; N$$

Q6) Jusqu'à quelle hauteur remonte la boule ?

La boule remonte jusqu'à 4 m, la hauteur depuis laquelle elle a été lâchée.

Partie III : Mouvement d'un chariot de fête foraine :

Le centre de gravité d'un chariot de fête foraine de 400 kg guidé par un rail se déplace à une vitesse constante de 18 km/h sur la parabole précédente située cette fois-ci dans un plan horizontal.

Q7) Décrire les forces qui agissent sur le système formé par le chariot et son équipage.

Les forces sont le poids $\vec{P}$ compensé par la réaction $\overrightarrow{R_v}$ verticale du rail et une réaction horizontale normale $\overrightarrow{R_n}$ du rail.

Q8) Donner l'intensité de la force exercée par le rail sur le chariot aux points d'abscisse 0 puis 1.

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} + \overrightarrow{R_v} + \overrightarrow{R_n} = m\,\vec{a}$$

Comme il n'y a pas de mouvement dans la direction verticale, on a : $\vec{P} + \overrightarrow{R_v} = \vec{0}$ donc :

$$\overrightarrow{R_n} = m\,\vec{a}$$

Or, en utilisant le repère de Frénet, on a :

$$\vec{a} = \vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + \frac{v^2}{r}\,\vec{N} = \frac{v^2}{r}\,\vec{N}$$

Donc :

$$\overrightarrow{R_n} = m\frac{v^2}{r}\,\vec{N}$$

Au point d'abscisse 0 :

$$\overrightarrow{R_n} = m\frac{v^2}{r(0)}\,\vec{j} = 400\frac{\left(\frac{18}{3{,}6}\right)^2}{0{,}5}\,\vec{j} = 20\ 000\,\vec{j}$$

L'intensité de cette force est donc 20 000 N.

Au point d'abscisse 1 :

$$\overrightarrow{R_n} = m\frac{v^2}{r(1)}\,\vec{T}(1)$$

Avec :

$$r(1) = 2{,}60\ m,$$

$$\vec{T}(1) = \frac{1}{\|\vec{u}(1)\|}\,\vec{u}(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\,(1\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{\imath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{\jmath}$$

$$\|\overrightarrow{R_n}\| = m\frac{v^2}{r(1)} = 400\frac{\left(\frac{18}{3{,}6}\right)^2}{2{,}60} = 3\ 846\ N$$

PARTIE IV : Calcul du rayon de courbure au point d'abscisse 0

Pour les amoureux des maths (comme votre professeur et nombre d'entre vous j'espère !) je vous propose de retrouver la valeur du rayon de courbure de la parabole précédente au point d'abscisse 0 en procédant comme suit :

Considérer un cercle de centre $I(0, r)$ et de rayon r puis suivre les questions :

Q9) Déterminer une équation cartésienne de ce cercle et en déduire l'expression de la fonction $g(x)$ dont la courbe est le demi-cercle inférieur situé dans le demi-plan $y \leq r$.

Un point $M(x, y)$ appartient au cercle si et seulement si :

$$MI^2 = r^2$$

soit :

$$(x-0)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2\,y\,r + r^2 = r^2$$

$$y^2 - 2\,r\,y + x^2 = 0$$

Pour obtenir l'expression de y en fonction de x, on considère cette équation du second degré en y de discriminant :

$$\Delta = 4\,r^2 - 4\,x^2$$

La fonction $g(x)$ est donc la valeur de y la plus petite, soit :

$$g(x) = \frac{2\,r - \sqrt{4\,r^2 - 4\,x^2}}{2} = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

Q10) Calculer $f'(x), g'(x), f''(x), g''(x)$

$$f'(x) = 2\,x$$

$$f''(x) = 2$$

$$g'(x) = \frac{2\,x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$g''(x) = \frac{1\sqrt{r^2 - x^2} - x\,\dfrac{-2\,x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}}{\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Q11) En déduire l'unique valeur de r telle que $f'(0) = g'(0)$ et $f''(0) = g''(0)$. Cette valeur est le rayon de courbure cherché.

$$g'(0) = 0 = f'(0)$$

$$g''(0) = \frac{1}{r}$$

$$f''(0) = 2$$

Donc :

$$g''(0) = f''(0) \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

N'hésitez pas à vous frotter au problème et à demander des conseils !!! La pugnacité est la clé de la (vraie) réussite et son ennemi juré, l'abus d'écrans et de réseaux sociaux !!!

PARTIE V : Pour les super cracks en maths !!!

Reprenant la description du mouvement circulaire vue en cours, on note que :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\frac{d\vec{T}}{d\theta} = \frac{1}{r}\,\vec{N}$$

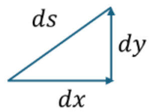
Donc :

$$\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \frac{1}{r}$$

Pour une courbe quelconque sur laquelle on a défini une abscisse curviligne s, nous aurons alors la même relation pour le rayon de courbure soit :

$$\boxed{r = \frac{1}{\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\|}}$$

Application : Pour une courbe d'équation cartésienne de la forme $y = f(x)$ où f est deux fois dérivable sur un intervalle I, on a, en utilisant le théorème de Pythagore sur une portion élémentaire de courbe orientée dans le sens des x croissants de longueur ds et assimilée à un segment :



$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Avec :

$$dy = f'(x)\,dx$$

Donc :

$$ds^2 = dx^2 + f'(x)^2\,dx^2 = dx^2\,(1 + f'(x)^2)$$

Et en prenant la racine :

$$\boxed{ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}}$$

De plus :

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}\,(\vec{\imath} + f'(x)\,\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{d\vec{T}}{dx}$$

A vous de jouer, si vous en avez le courage pour calculer :

$$\frac{d\vec{T}}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\,(\vec{\imath} + f'(x)\,\vec{\jmath})\right)$$

Et pour en déduire la formule du rayon de courbure

$$\frac{d\vec{T}}{dx} = \frac{d}{dt}\left((1+f'(x)^2)^{-\frac{1}{2}}\,(\vec{\imath} + f'(x)\,\vec{\jmath})\right)$$

On dérive comme un produit :

$$\frac{d\vec{T}}{dx} = -\frac{1}{2} \times 2\,f'(x)\,f''(x)\,(1+f'(x)^2)^{-\frac{3}{2}}\,(\vec{\imath} + f'(x)\,\vec{\jmath}) + (1+f'(x)^2)^{-\frac{1}{2}}\,f''(x)\,\vec{\jmath}$$

On factorise $f''(x)$

$$\frac{d\vec{T}}{dx} = f''(x)\left(-\frac{f'(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{\imath} - \frac{f'(x)^2}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\jmath} + \frac{1}{(1+f'(x)^2)^{\frac{1}{2}}}\,\vec{\jmath}\right)$$

On met au même dénominateur :

$$\frac{d\vec{T}}{dx} = f''(x)\left(-\frac{f'(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{\imath} - \frac{f'(x)^2}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\jmath} + \frac{1+f'(x)^2}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\jmath}\right)$$

On factorise le dénominateur et on simplifie :

$$\frac{d\vec{T}}{dx} = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\,(-f'(x)^2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

Ainsi :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\,\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\,(-f'(x)^2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{4}{2}}}\,(-f'(x)^2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

On calcule la norme de ce vecteur :

$$\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{4}{2}}}\,(1+f'(x)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Soit finalement :

$$\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Et le rayon de courbure s'en déduit :

$$r = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|} = \frac{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

ANNEXE

Formule donnant le rayon de courbure en un point d'abscisse x d'une courbe d'équation $y = f(x)$ pour une fonction f deux fois dérivables sur un intervalle I :

$$r(x) = \frac{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

Cas particulier :

si $f'(0) = 0$ alors :

$$r(0) = \frac{1}{|f''(0)|}$$

Formule donnant un vecteur tangent au point d'abscisse x :

$$\vec{u} = 1\,\vec{\imath} + f'(x)\,\vec{\jmath}$$

Rappel des formules cinématiques vectorielles dans la base de Frénet :

$$\vec{v} = v\,\vec{T},\ \ \vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + \frac{v^2}{r}\,\vec{N}$$