

On considère un ressort horizontal, de masse linéique μ , de longueur à vide L et de raideur K dont une extrémité est fixée en O et dont l'extrémité mobile M est reliée à une masse m qui peut se déplacer sans frottements. On repère le mouvement d'une spire situé en x au repos par sa position $x + \xi(x, t)$. Si on coupe fictivement le ressort à l'abscisse x , la force exercée par la partie droite sur la partie gauche est donnée par la loi de Hooke :

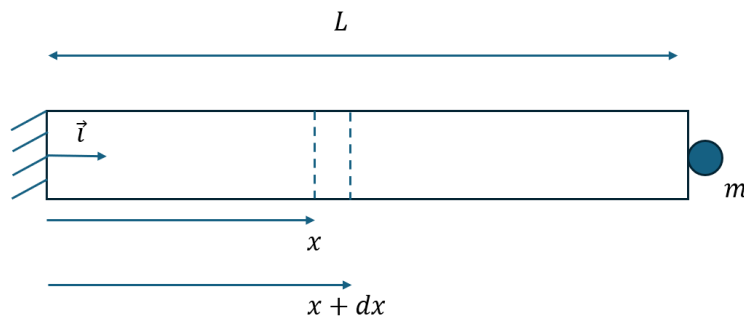
$$F = KL \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

1. Montrer que $\xi(x, t)$ est solution d'une équation de d'Alembert.
2. Écrire les conditions aux limites vérifiées par ξ .
3. On cherche des solutions stationnaires de cette équation de la forme $\xi(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$. Montrer que $f(x) = B \sin \frac{\omega x}{c}$, où B est une constante, puis déterminer l'équation donnant les pulsations ω des modes propres et la discuter graphiquement.

Réponse :

1^{ère} étape : Modélisation du problème :

On modélise le ressort par une poutre horizontale de masse linéique μ et de longueur L encastree à son extrémité gauche et à laquelle est accrochée à son extrémité droite une masse ponctuelle m .



Nous allons d'abord redémontrer la loi de Hooke :

En ne considérant dans la poutre qu'un mouvement de traction compression dans lequel chaque section reste rigide et ne peut se déplacer qu'horizontalement, la contrainte normale instantanée $\sigma(x, t)$ est à tout instant uniforme en tout point d'abscisse x de la section et est reliée à la déformation $\varepsilon(x, t)$ également uniforme dans la section à tout instant par la relation :

$$\sigma(x) = E \varepsilon(x)$$

Et la force exercée par le milieu situé à droite d'une section d'abscisse x et d'aire S sur le milieu situé à gauche est :

$$F(x, t) = \sigma(x, t) S = E S \varepsilon(x, t)$$

Or :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}$$

En posant $E S = K L$ on obtient la loi de Hookes.

Considérons alors une tranche de poutre située entre les abscisses x et $x + dx$ de masse μdx .

Dans l'hypothèse des petites perturbations, la section de gauche de cette tranche se trouve à l'instant t soumise à une force de composante sur $\vec{i}$:

$$-F(x, t) = -K L \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}$$

Et la section de droite à la force de composante :

$$F(x + dx, t) = K L \frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x}$$

La somme de ces deux forces a donc pour composante, au premier ordre :

$$F(x + dx, t) - F(x, t) = K L \left(\frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right) \approx K L \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} dx$$

La position du centre de gravité de la tranche à l'instant t est, au premier ordre :

$$x + \frac{dx}{2} + \xi \left(x + \frac{dx}{2}, t \right) \approx x + \xi(x, t)$$

Et la composante de son accélération sur $\vec{i}$:

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}$$

La relation fondamentale de la dynamique, appliquée à la tranche, s'écrit donc :

$$\mu dx a(x, t) = F(x + dx, t) - F(x, t)$$

Soit :

$$\mu dx \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = K L \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} dx$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{K L}{\mu} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2}$$

C'est une équation d'ondes de D'Alembert, avec des ondes se propageant à la célérité :

$$c = \sqrt{\frac{K L}{\mu}}$$

2^{ème} étape : Condition aux limites :

L'encastrement de la poutre en $x = 0$ se traduit pour tout t par :

$$\xi(0, t) = 0$$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m se traduit par :

$$m \frac{\partial^2 \xi(L, t)}{\partial t^2} = -K L \frac{\partial \xi(L, t)}{\partial x}$$

3^{ème} étape : recherche des solutions stationnaires :

$$\xi(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x) \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = f''(x) \cos(\omega t)$$

Reportons dans l'équation de D'Alembert :

$$-\omega^2 f(x) \cos(\omega t) = c^2 f''(x) \cos(\omega t)$$

$$f''(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} f(x)$$

Les solutions de cette équations sont de la forme :

$$f(x) = A \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right)$$

La condition aux limites en $x = 0$ donne :

$$A = 0$$

Donc :

$$f(x) = B \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right)$$

$$\xi(x, t) = B \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) \cos(\omega t)$$

La condition aux limites en $x = L$ s'écrit :

$$-m \omega^2 B \sin\left(\frac{\omega}{c} L\right) \cos(\omega t) = -K L B \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c} L\right) \cos(\omega t)$$

Donc, sachant $K L = \mu c^2$:

$$m \omega^2 \frac{\sin\left(\frac{\omega}{c} L\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{c} L\right)} = \mu c^2 \frac{\omega}{c}$$

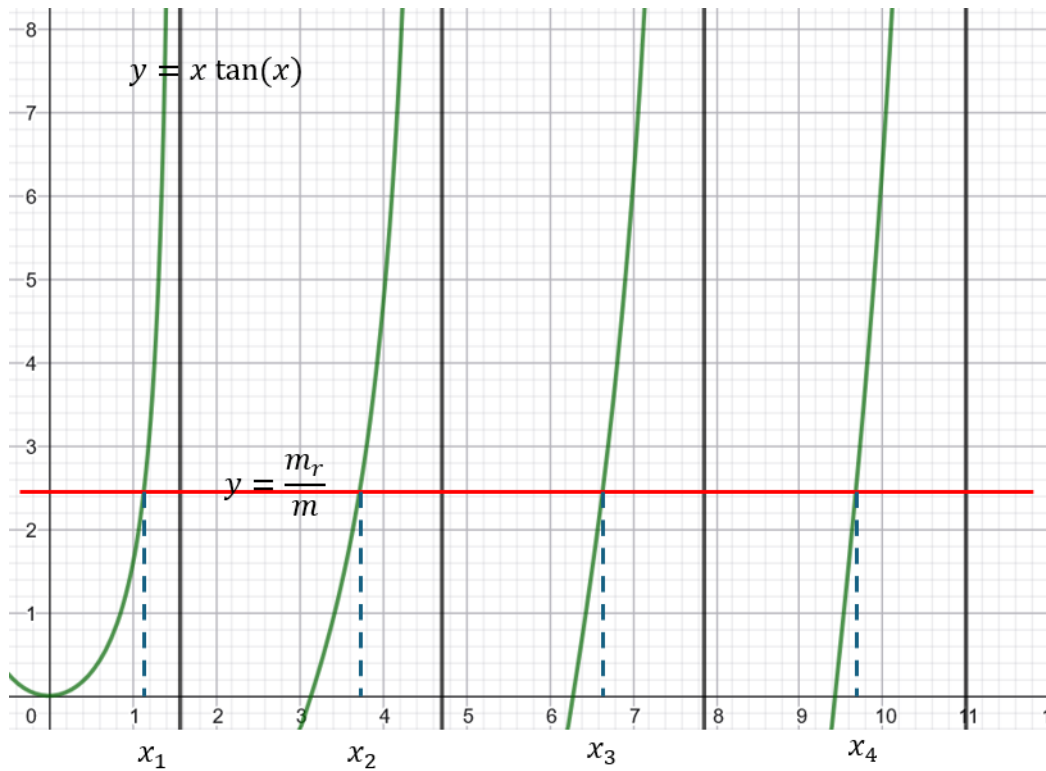
$$\frac{\omega}{c} L \tan\left(\frac{\omega}{c} L\right) = \frac{\mu L}{m}$$

Finalement, en notant $m_r = \mu L$ la masse du ressort et en faisant apparaître la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$\frac{2\pi f}{c} L \tan\left(\frac{2\pi f}{c} L\right) = \frac{m_r}{m}$$

Cette relation fait apparaître une suite discrète de modes propres de vibration à des fréquences f_n , pour $n = 1$ à l'infini, que nous obtenons ainsi :

On détermine les abscisses x_n des points d'intersection de la courbe d'équation $y = x \tan(x)$ avec la courbe d'équation $y = \frac{m_r}{m}$.



On a alors :

$$f_n = \frac{c x_n}{2 \pi L}$$

Deux cas limites peuvent être facilement explicités :

1^{er} cas : $m = 0$, extrémité droite libre

$$\frac{m_r}{m} = +\infty$$

$$x_n \tan(x_n) = +\infty$$

$$x_n = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$f_n = \frac{(2n-1)c}{4L}$$

2^{ème} cas : $m = +\infty$, extrémité droite encastree

$$\frac{m_r}{m} = 0$$

$$x_n \tan(x_n) = 0$$

$$x_n = n\pi = (2n)\frac{\pi}{2}$$

$$f_n = \frac{nc}{2L}$$

