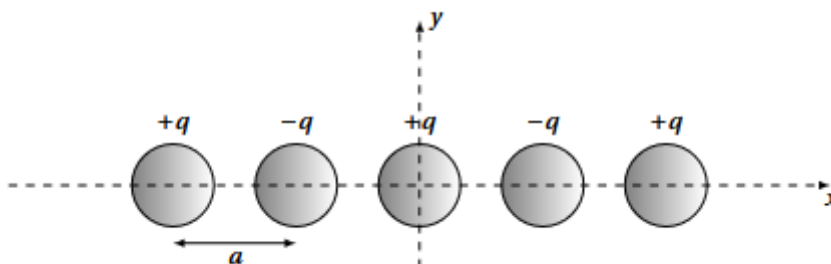


On considère une chaîne de charges électriques et on impose un déplacement dans le sens vertical à une des charges.

Déterminer la célérité des ondes générées.



Réponse :

Modélisation du problème :

Munissons les axes d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, O étant le centre au repos de la charge à laquelle on impose le mouvement. Numérotons les charges de même masse m dans le sens des x croissants. Désignons par $M_n(x_n, y_n)$ la position instantanée de la charge de numéro n . Alors on a :

$$x_n = n a$$

$$\overrightarrow{M_n M_{n+1}} = (x_{n+1} - x_n) \vec{i} + (y_{n+1} - y_n) \vec{j} = a \vec{i} + (y_{n+1} - y_n) \vec{j}$$

$$\overrightarrow{M_n M_{n-1}} = -a \vec{i} + (y_{n-1} - y_n) \vec{j}$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations, $y_n \ll a$ pour tout n , on a :

$$M_n M_{n+1} \approx M_n M_{n-1} \approx a$$

Calcul de la résultante des forces sur une charge :

La charge n , pour $n > 0$, est alors soumise aux forces électrostatiques créées par ses plus proches voisines, les charges $n - 1$ et $n + 1$, où $q_n q_{n-1} = q_n q_{n+1} = -q^2$, les autres interactions étant négligées :

$$\vec{F}_{n+1 \rightarrow n} = -\frac{K q_n q_{n+1}}{(M_n M_{n+1})^3} \overrightarrow{M_n M_{n+1}} \approx \frac{K q^2}{a^3} \overrightarrow{M_n M_{n+1}} = \frac{K q^2}{a^3} (a \vec{i} + (y_{n+1} - y_n) \vec{j})$$

et de façon analogue :

$$\vec{F}_{n-1 \rightarrow n} = -\frac{K q_n q_{n-1}}{(M_n M_{n-1})^3} \overrightarrow{M_n M_{n-1}} \approx \frac{K q^2}{a^3} \overrightarrow{M_n M_{n-1}} \approx \frac{K q^2}{a^3} (-a \vec{i} + (y_{n-1} - y_n) \vec{j})$$

où on a posé :

$$K = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$$

Donc la résultante des forces extérieures à cette charge est :

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{n+1 \rightarrow n} + \vec{F}_{n-1 \rightarrow n} \approx \frac{K q^2}{a^3} (y_{n+1} + y_{n-1} - 2 y_n) \vec{j}$$

Principe fondamental de la dynamique :

La résultante des forces étant, au premier ordre, colinéaire à $\vec{j}$, le mouvement des charges se fait dans la direction verticale et l'accélération de la charge n est :

$$\vec{a}_n = \ddot{y}_n \vec{j}$$

La deuxième loi de Newton s'écrit alors :

$$\vec{F}_n = m \vec{a}_n$$

Soit :

$$m \ddot{y}_n = \frac{K q^2}{a^3} (y_{n+1} + y_{n-1} - 2 y_n)$$

Recherche des solutions de base : les ondes propagatives sinusoïdales :

Par symétrie, on se limitera à chercher les ondes se propageant dans le sens des x croissants.

Ces ondes sont de la forme :

$$y_n = A \cos(k x_n - \omega t)$$

et la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g sont :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Et la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Première méthode : sans utiliser les complexes mais la plus longue !

$$\ddot{y}_n = -\omega^2 y_n$$

$$y_{n+1} = A \cos(k x_{n+1} - \omega t) = A \cos(k (x_n + a) - \omega t)$$

$$y_{n-1} = A \cos(k x_{n-1} - \omega t) = A \cos(k (x_n - a) - \omega t)$$

Or, on rappelle l'identité trigonométrique :

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Ainsi :

$$y_{n+1} + y_{n-1} = A \times 2 \cos(k a) \cos(k x_n - \omega t) = 2 \cos(k a) y_n$$

La deuxième loi de Newton s'écrit alors :

$$-m \omega^2 y_n = \frac{K q^2}{a^3} (2 \cos(k a) - 2) y_n$$

Soit :

$$\omega^2 = \frac{2 K q^2}{m a^3} (1 - \cos(k a)) = \frac{4 K q^2}{m a^3} \sin^2\left(\frac{k a}{2}\right)$$

Finalement :

$$\omega = \sqrt{\frac{K q^2}{m a} \frac{2 \sin\left(\frac{k a}{2}\right)}{a}}$$

Et :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{K q^2}{m a} \frac{\sin\left(\frac{k a}{2}\right)}{\frac{k a}{2}}}, \quad v_g = \sqrt{\frac{K q^2}{m a} \cos\left(\frac{k a}{2}\right)}$$

Ces vitesses dépendent du nombre d'onde k mais si la longueur d'onde λ est très grande devant a alors $\frac{k a}{2} \ll 1$ et on peut faire l'approximation :

$$\sin\left(\frac{k a}{2}\right) \approx \frac{k a}{2}, \quad \cos\left(\frac{k a}{2}\right) \approx 1$$

auquel cas v_φ et v_g ne dépendent plus de k :

$$v_\varphi = v_g = c = \sqrt{\frac{K q^2}{m a}}$$

Conclusion :

Toutes les ondes propagatives sinusoïdales de longueur d'onde grande devant la distance inter charges se propagent à une même vitesse.

c est aussi la borne supérieure de la vitesse de groupe pour tout nombre d'onde k

Deuxième méthode : utilisant les complexes et plus rapide !

On introduit une fonction complexe du temps :

$$\underline{y}_n = A e^{i(k x_n - \omega t)}$$

Et on cherche une solution complexe de cette forme à la deuxième loi de Newton :

$$\ddot{\underline{y}}_n = -\omega^2 \underline{y}_n$$

$$\underline{y}_{n+1} = A e^{i(k(x_n+a) - \omega t)} = e^{i k a} \underline{y}_n$$

$$\underline{y}_{n-1} = A e^{i(k(x_n-a) - \omega t)} = e^{-i k a} \underline{y}_n$$

$$\underline{y}_{n+1} + \underline{y}_{n-1} = (e^{i k a} + e^{-i k a}) \underline{y}_n = 2 \cos(k a) \underline{y}_n$$

Reporté dans la deuxième loi de Newton, on obtient :

$$-m \omega^2 \underline{y_n} = \frac{K q^2}{a^3} (2 \cos(k a) - 2) \underline{y_n}$$

Et en simplifiant, on retrouve la même équation que précédemment. Et la partie réelle de $\underline{y_n}$ donne les solutions y_n telles que définies dans la première méthode.