TD n° 9 Système d'équilibrage de pneumatique

Les roues des voitures tournent généralement entre 20 et 40 tours par seconde, soumettant chaque gramme de la roue à une force centrifuge de plusieurs centaines de grammes. Si la roue était parfaitement homogène, avec une répartition uniforme de sa masse autour de l'axe de rotation, elle serait équilibrée. Cependant, en pratique, des imperfections de fabrication (comme l'excentricité des pneus ou le décentrage de la jante) ou d'utilisation (comme l'usure irrégulière) créent un déséquilibre. Cela affecte le confort et la durabilité des pièces, rendant nécessaire un équilibrage régulier des pneumatiques.

Le but de ce travail est d'analyser le fonctionnement de la machine de test d'équilibrage des pneumatiques de la Figure 1.

FIGURE 1 – Machine de test d'équilibrage des pneumatiques : un capteur détecte les déformations de l'axe de rotation causées par le déséquilibre et indique la position des masselottes à ajouter.

La roue déséquilibré est représenté sur la Figure 2 comme un solide S de masse M et de centre d'inertie G, tel que $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{u}$. Sa matrice d'inertie $\mathbb{I}\,[O;S]$ au point O est :

$$\mathbb{I}\,[O;S] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{z})}$$

où la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z})$ est fixe par rapport à la roue S. A noter que l'opérateur d'inertie est de forme quelconque, c'est-à-dire que les termes A, B, C, D, E et F sont non nuls.

Question 1 *Donner l'expression du taux de rotation $\overrightarrow{\Omega}(S/\mathcal{R})$ de S par rapport à $\mathcal{R}\,(0; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ et calculer la vitesse $\overrightarrow{V}(G\ \mathcal{R})$, en fonction de $\dot{\theta}$ et des données du problème.*

Question 2 *Exprimer la résultante cinétique $\overrightarrow{p}(S/\mathcal{R})$ et le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}(O; S/\mathcal{R})$.*

Question 3 *En déduire, l'expression du torseur dynamique au point O.*

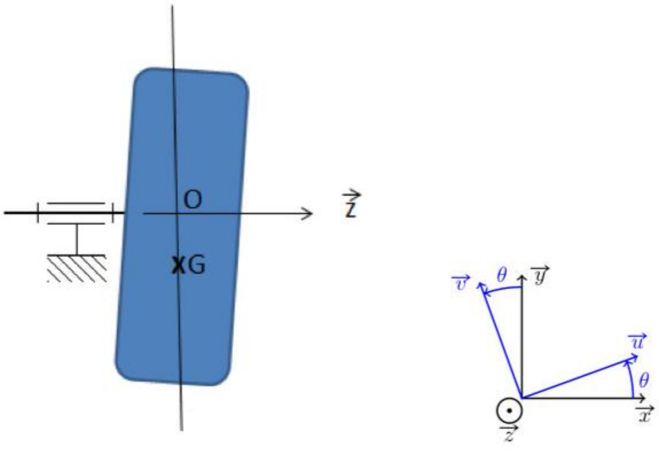
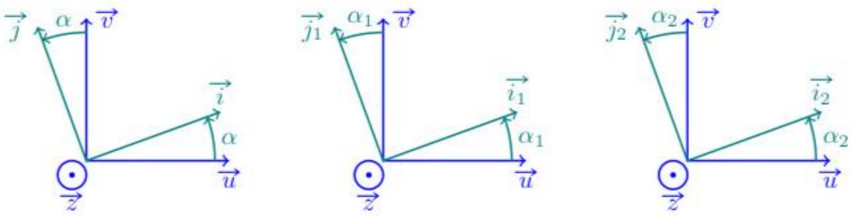


FIGURE 2 – Schéma cinématique de la roue sur l'équilibreuse.

On parle d'équilibrage dynamique lorsque le solide S tourne à vitesse de rotation constante $\dot{\theta} = \omega$ et que les éléments du torseur dynamique sont nuls, quelle que soit la vitesse de rotation ω .

Question 4 *Quelles conditions doivent vérifier les caractéristiques de S pour qu'il soit équilibré dynamiquement ?*

Cette condition n'étant pas naturellement respectée pour une roue, nous proposons d'équilibrer dynamiquement la roue en ajoutant une masselotte de masse m au point M. Cette masselotte, considérée comme ponctuelle, est solidaire du solide S et tourne avec lui. Sa position est repérée par le vecteur $\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{z} + r\,\overrightarrow{i}$, où $\overrightarrow{i}$ incliné d'un angle α constant par rapport à l'axe $\overrightarrow{u}$.



Question 5 *Écrire la résultante cinétique de la masselotte m par rapport $\mathcal{R}$, $\overrightarrow{p}(m/\mathcal{R})$, et le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}(O; m/\mathcal{R})$. En déduire la résultante dynamique et le moment de cette résultante par rapport au point O.*

Les quantités mentionnées s'ajoutent à la résultante et au moment dynamique du système S. La masselotte m est fixée sur la jante du pneu, à une position donnée par le rayon r et la distance l.

Question 6 *Est-il possible de positionner une masselotte de manière à annuler la résultante dynamique du système $\{S + m\}$? Si oui, comment doit être placée la masselotte m pour assurer cet équilibrage ? Indiquez les expressions de m et de α nécessaires pour satisfaire cette condition.*

Question 7 *Une fois cette condition remplie, est-il également possible d'annuler le moment dynamique du système, quelle que soit la vitesse de rotation ω ? Si oui, donnez les expressions de m, r et α qui permettent de satisfaire cette condition.*

Dans le cas où la réponse à la question 7 est négative, on envisage d'utiliser deux masselottes m_1 et m_2, dont les positions respectives sont définies par $\overrightarrow{OM_1} = l\overrightarrow{z} + r\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{OM_2} = -l\overrightarrow{z} + r\overrightarrow{i_2}$, et par les angles α_1 et α_2.

Question 8 *Est-il possible de positionner ces deux masselottes de manière à annuler à la fois la résultante dynamique et le moment dynamique par rapport au point O pour l'ensemble $\{S + m_1 + m_2\}$? Si oui, quelles relations doivent satisfaire les paramètres de position et la masse des masselottes pour assurer cette condition ? Est-il possible de déterminer analytiquement les valeurs m_1, m_2, α_1 et α_2 ?*

Réponses :

Question 1 :

$$\boxed{\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\,\vec{z} = \omega\,\vec{z}}$$

$$\vec{\mathrm{v}}(G/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OG} = \omega\,\vec{z} \wedge a\,\vec{u} = a\,\omega\,\vec{v}$$

Question 2 :

$$\boxed{\vec{\mathrm{p}}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = M\,\vec{\mathrm{v}}(G/\mathcal{R}) = M\,a\,\omega\,\vec{v}}$$

Posons :

$$\vec{\sigma}(O;\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \sigma_u\,\vec{u} + \sigma_v\,\vec{v} + \sigma_z\,\vec{z}$$

Alors :

$$\begin{pmatrix}\sigma_u\\ \sigma_v\\ \sigma_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & -F & -E\\ -F & B & -D\\ -E & -D & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mathrm{E}\,\omega\\ -\mathrm{D}\,\omega\\ C\,\omega\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{\sigma}(O;\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \ \omega\,(-\,\mathrm{E}\,\vec{u} + \mathrm{D}\,\vec{v} + \mathrm{C}\,\vec{z})}$$

Question 3 :

Résultante du torseur dynamique

$$\frac{d\vec{\mathrm{p}}(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = M\,a\left(\frac{d\omega}{dt}\,\vec{v} + \omega\,\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = M\,a\left(\frac{d\omega}{dt}\,\vec{v} + \omega\,\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}\right)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\mathrm{p}}(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = M\,a\left(\frac{d\omega}{dt}\,\vec{v} - \omega^2\,\vec{u}\right)}$$

Moment dynamique :

$$\vec{\Gamma}(O;\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{\sigma}(O;\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\,(-\,\mathrm{E}\,\vec{u} + \mathrm{D}\,\vec{v} + \mathrm{C}\,\vec{z}) + \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge (-\,\mathrm{E}\,\vec{u} + \mathrm{D}\,\vec{v} + \mathrm{C}\,\vec{z})$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(O;\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{d\omega}{dt}\,(-\,\mathrm{E}\,\vec{u} + \mathrm{D}\,\vec{v} + \mathrm{C}\,\vec{z}) + \omega^2\,(-\,\mathrm{E}\,\vec{v} - \mathrm{D}\,\vec{u})}$$

Question 4 :

Le torseur dynamique étant égal au torseur des forces extérieures appliquées au système $\mathcal{S}$ lui-même égal à l'opposé du torseur des efforts appliqués par le système $\mathcal{S}$ sur l'arbre, pour que le système $\mathcal{S}$ n'ait pas aucune action sur l'arbre quand la vitesse de rotation est constante il faut et il suffit que le torseur dynamique soit nul c'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d\vec{\mathrm{p}}(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = \vec{0}\\[2ex] \vec{\Gamma}(O;\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{0}\end{gathered}}$$

Or si $a \neq 0$, ce qui revient à dire que le centre de gravité de $\mathcal{S}$ n'est pas sur l'axe, on a, à vitesse de rotation constante :

$$\boxed{\frac{d\vec{\mathrm{p}}(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = -M\,a\,\omega^2\,\vec{u} \neq \vec{0}}$$

L'axe de rotation est donc soumis à une force résultante non nulle exercée par $\mathcal{S}$

Il convient donc d'équilibrer la roue en ajoutant au moins une masselotte afin de ramener le centre de gravité sur l'axe.

<u>Question 5</u> :

$$\vec{\mathrm{p}}(m/\mathcal{R}) = m\,\vec{\mathrm{v}}(M/\mathcal{R}) = m\,\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} = \ m\,\omega\,\vec{z} \wedge (r\,cos(\alpha)\,\vec{u} + r\,sin(\alpha)\,\vec{v} + l\,\vec{z})$$

$$\boxed{\vec{\mathrm{p}}(m/\mathcal{R}) = \ m\,\omega\,r\,(-sin(\alpha)\,\vec{u} + cos(\alpha)\,\vec{v}) = m\,\omega\,r\,\vec{\jmath}}$$

$$\vec{\sigma}(O;m/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\mathrm{p}}(m/\mathcal{R})$$

$$\begin{pmatrix} r\,cos(\alpha) \\ r\,sin(\alpha) \\ l \end{pmatrix} \wedge m\,\omega\,r \begin{pmatrix} -sin(\alpha) \\ cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = m\,\omega\,r \begin{pmatrix} -l\,cos(\alpha) \\ -l\,sin(\alpha) \\ r \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(O;m/\mathcal{R}) = m\,\omega\,r\,(-l\,cos(\alpha)\,\vec{u} - l\,sin(\alpha)\,\vec{v} + r\,\vec{z}\,) = m\,\omega\,r\,(-\,l\,\vec{\imath} + r\,\vec{z})}$$

<u>Résultante dynamique à ω constant</u> :

$$\frac{d\vec{\mathrm{p}}(m/\mathcal{R})}{dt} = \omega\,\vec{z} \wedge m\,\omega\,r\,(cos(\alpha)\,\vec{v} - sin(\alpha)\,\vec{u}) = m\,\omega^2\,r\,(-cos(\alpha)\,\vec{u} - sin(\alpha)\,\vec{v})$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\mathrm{p}}(m/\mathcal{R})}{dt} = -m\,\omega^2\,r\,(cos(\alpha)\,\vec{u} + sin(\alpha)\,\vec{v})}$$

<u>Moment dynamique</u> :

$$\vec{\Gamma}(O;m/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{\sigma}(O;m/\mathcal{R})}{dt} = m\,\omega^2\,r\,(-l\,cos(\alpha)\,\vec{v} + l\,sin(\alpha)\,\vec{u})$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(O;m/\mathcal{R}) = -m\,\omega^2\,r\,l\,(-sin(\alpha)\,\vec{u} + cos(\alpha)\,\vec{v}) = -m\,\omega^2\,r\,l\,\vec{\jmath}}$$

<u>Question 6</u> : Pour le système $\{\mathcal{S} + m\}$

<u>Résultante dynamique</u> :

$$\frac{d\vec{\mathrm{p}}(m+\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = \frac{d\vec{\mathrm{p}}(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} + \frac{d\vec{\mathrm{p}}(m/\mathcal{R})}{dt} = -M\,a\,\omega^2\,\vec{u} - m\,\omega^2\,r\,(cos(\alpha)\,\vec{u} + sin(\alpha)\,\vec{v})$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\mathrm{p}}(m+\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = -\omega^2\,\big((M\,a + m\,r\,cos(\alpha))\,\vec{u} + m\,r\,sin(\alpha)\,\vec{v}\big)}$$

Moment dynamique :

$$\vec{\Gamma}(O; m + \mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\Gamma}(O; \mathcal{S}/\mathcal{R}) + \vec{\Gamma}(O; m/\mathcal{R})$$

$$\vec{\Gamma}(O; m + \mathcal{S}/\mathcal{R}) = \omega^2\,(-\,\mathrm{E}\,\vec{v} - \mathrm{D}\,\vec{u}) - m\,\omega^2\,r\,l\,(-sin(\alpha)\,\vec{u} + cos(\alpha)\,\vec{v})$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(O; m + \mathcal{S}/\mathcal{R}) = \omega^2\big((m\,r\,l\,sin(\alpha) - D)\,\vec{u} - (m\,r\,l\,cos(\alpha) + E)\,\vec{v}\ \big)}$$

Une condition pour que le système soit équilibré est que :

$$\frac{d\vec{\mathrm{p}}(m + \mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = \vec{0}$$

Cela impose

$$\begin{cases} m\,r\,sin(\alpha) = 0 \\ M\,a + m\,r\,cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Comme m doit être positive, cela impose donc :

$$\begin{cases} \alpha = \pi \\ M\,a - m\,r\ = 0 \end{cases}$$

Mais dans ce cas :

$$\vec{\Gamma}(O; m + \mathcal{S}/\mathcal{R}) = \omega^2\,(-D\,\vec{u} - (-m\,r\,l + E)\,\vec{v}\ \ )$$

Pour que le système soit équilibré il faudrait donc avoir :

$$D = 0;\ \ m = \frac{E}{r\,l} = \frac{M\,a}{r}$$

Il y a donc très peu de chances que ce soit possible.

Question 7 : Pour le système $\{\mathcal{S} + m_1 + m_2\}$

Résultante dynamique :

$$\frac{d\vec{\mathrm{p}}(\mathcal{S} + m_1 + m_2/\mathcal{R})}{dt} = \frac{d\vec{\mathrm{p}}(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} + \frac{d\vec{\mathrm{p}}(m_1/\mathcal{R})}{dt} + \frac{d\vec{\mathrm{p}}(m_2/\mathcal{R})}{dt}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d\vec{\mathrm{p}}(\mathcal{S} + m_1 + m_2/\mathcal{R})}{dt} = \\ -\omega^2\ \Big(\big(M\,a + r\,\big(m_1\,cos(\alpha_1) + m_2\,cos(\alpha_2)\big)\big)\,\vec{u} + r\,\big(m_1\,sin(\alpha_1) + m_2\,sin(\alpha_2)\big)\,\vec{v}\Big)\end{gathered}}$$

Moment dynamique :

$$\vec{\Gamma}(O; \mathcal{S} + m_1 + m_2/\mathcal{R}) = \vec{\Gamma}(O; \mathcal{S}/\mathcal{R}) + \vec{\Gamma}(O; m_1/\mathcal{R}) + +\vec{\Gamma}(O; m_2/\mathcal{R})$$

$$\vec{\Gamma}(O; \mathcal{S} + m_1 + m_2/\mathcal{R}) =$$

$$\omega^2\,(-\,\mathrm{E}\,\vec{v}-\mathrm{D}\,\vec{u})-m_1\,\omega^2\,r\,l\,(-sin(\alpha_1)\,\vec{u}+cos(\alpha_1)\,\vec{v})+m_2\,\omega^2\,r\,l\,(-sin(\alpha_2)\,\vec{u}+cos(\alpha_2)\,\vec{v})$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{\Gamma}(O;\mathcal{S}+m_1+m_2/\mathcal{R})=\\ \omega^2\Big(\big(r\,l\,\big(m_1\,sin(\alpha_1)-m_2\,sin(\alpha_2)\big)-D\big)\,\vec{u}-\big(r\,l\,\big(m_1\,cos(\alpha_1)-m_2\,cos(\alpha_2)\big)+E\big)\,\vec{v}\ \Big)\end{gathered}}$$

Conditions pour que le système soit équilibré :

$$\begin{cases}M\,a+r\,\big(m_1\,cos(\alpha_1)+m_2\,cos(\alpha_2)\big)=0\\ m_1\,sin(\alpha_1)+m_2\,sin(\alpha_2)=0\\ r\,l\,\big(m_1\,sin(\alpha_1)-m_2\,sin(\alpha_2)\big)-D=0\\ r\,l\,\big(m_1\,cos(\alpha_1)-m_2\,cos(\alpha_2)\big)+E=0\end{cases}$$

C'est un système de 4 équations à 4 inconnues donc ayant a priori une solution unique.

Résolution :

$$\begin{cases}m_1\,cos(\alpha_1)+m_2\,cos(\alpha_2)=-\dfrac{M\,a}{r}\\ m_1\,cos(\alpha_1)-m_2\,cos(\alpha_2)=-\dfrac{E}{r\,l}\\ m_1\,sin(\alpha_1)+m_2\,sin(\alpha_2)=0\\ m_1\,sin(\alpha_1)-m_2\,sin(\alpha_2)=\dfrac{D}{r\,l}\end{cases}$$

Par addition et différence des deux premières et des deux suivantes, on obtient :

$$\begin{cases}2\,m_1\,cos(\alpha_1)=-\left(\dfrac{M\,a}{r}+\dfrac{E}{r\,l}\right)=-\dfrac{M\,a\,l+E}{r\,l}\\ 2\,m_2\,cos(\alpha_2)=-\left(\dfrac{M\,a}{r}-\dfrac{E}{r\,l}\right)=-\dfrac{M\,a\,l-E}{r\,l}\\ 2\,m_1\,sin(\alpha_1)=\dfrac{D}{r\,l}\\ 2\,m_2\,sin(\alpha_2)=-\dfrac{D}{r\,l}\end{cases}$$

En faisant le quotient de la 3 sur la 1 puis la 4 sur la 2 on obtient :

$$\begin{cases}tan(\alpha_1)=-\dfrac{D}{M\,a\,l+E}\\ tan(\alpha_2)=-\dfrac{D}{M\,a\,l-E}\end{cases}$$

Notant que $sin(\alpha_1)>0$; $cos(\alpha_1)<0$ on peut donc choisir α_1 dans $\left]\frac{\pi}{2};\,\pi\right[$ auquel cas $\alpha_1-\pi$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ et ainsi :

$$\alpha_1-\pi=Atan\big(tan(\alpha_1-\pi)\big)=Atan\big(tan(\alpha_1)\big)=Atan\left(-\frac{D}{M\,a\,l+E}\right)$$

Et :

$$\boxed{\alpha_1=\pi-Atan\left(\frac{D}{M\,a\,l+E}\right)}$$

Pour α_2 on procède de manière analogue en notant que $sin(\alpha_2) < 0$; $cos(\alpha_2)$ ayant un signe à déterminer selon les valeurs des paramètres du système.

On en déduit ensuite les masses :

$$\boxed{\begin{gathered} m_1 = \frac{D}{2\ r\ l\ sin(\alpha_1)} \\ m_2 = \frac{D}{2\ r\ l\ sin(-\alpha_2)} \end{gathered}}$$