Enoncé :

Soit A, B, C un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit direct et a, b, c les affixes complexes respectives des trois points. Montrer que :

$$\boldsymbol{A, B, C \text{ équilatéral} \Leftrightarrow a + b\,j + c\,j^2 = 0}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a\,b + a\,c + b\,c}$$

où $\boldsymbol{j = exp\left(i\,\frac{2\,\pi}{3}\right)}$

Réponse :

A, B, C est équilatéral si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{2\,\pi}{3}$ ce qui se traduit sur les affixes par la relation :

$$c - b = j\,(b - a)$$

Laquelle multipliée par j^2 équivaut à :

$$j^2 c - j^2\,b = b - a$$

ou encore :

$$a + (-1 - j^2)\,b + j^2 c = 0$$

Soit encore, en rappelant que : $1 + j + j^2 = 0$:

$$a + j\,b + j^2 c = 0$$

Pour la seconde équivalence, il suffit de noter que :

$$A, B, C \text{ équilatéral} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b\,j + c\,j^2 = 0 \\ a + b\,j^2 + c\,j \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a + b\,j + c\,j^2)\,(a + b\,j^2 + c\,j) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a\,b\,j^2 + a\,c\,j + a\,b\,j + b^2 + b\,c\,j^2 + a\,c\,j^2 + b\,c\,j + c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a\,b\,(-j^2 - j) + a\,c(-j - j^2) + b\,c\,(-j^2 - j) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a\,b + a\,c + b\,c$$