Enoncé : Calcul des sinus et cosinus de $\pi/5$

1) **Déterminer une expression de $sin(5\,x)$ en fonction de $sin(x)$**
2) **En déduire un polynôme dont est racine $sin(\pi/5)$**
3) **En déduire une expression de $sin(\pi/5)$ puis de $cos(\pi/5)$**

Réponse :

1)

$$sin(5\,x) = \frac{e^{i\,5\,x} - e^{-i\,5\,x}}{2\,i} = \frac{1}{2\,i}\left(\left(e^{i\,x}\right)^5 - \left(e^{-i\,x}\right)^5\right)$$

$$= \frac{1}{2\,i}\left(\left(cos(x) + i\,sin(x)\right)^5 - \left(cos(x) - i\,sin(x)\right)^5\right)$$

$$= \frac{1}{2\,i}\Big(cos^5(x) + 5\,i\,cos^4(x)\,sin(x) - 10\,cos^3(x)\,sin^2(x) - 10\,i\,cos^2(x)\,sin^3(x) + 5\;cos\,(x)\,sin^4(x) + i\,sin^5(x) - \big(cos^5(x) - 5\,i\,cos^4(x)\,sin(x) - 10\,cos^3(x)\,sin^2(x) + 10\,i\,cos^2(x)\,sin^3(x) + 5\;cos\,(x)\,sin^4(x) - i\,sin^5(x)\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2\,i}\left(10\,i\,cos^4(x)\,sin(x) - 20\,i\,cos^2(x)\,sin^3(x) + 2\,i\,sin^5(x)\right)$$

$$= 5\,cos^4(x)\,sin(x) - 10\,cos^2(x)\,sin^3(x) + \;sin^5(x)$$

$$= 5\left(1 - sin^2(x)\right)^2 sin(x) - 10\left(1 - sin^2(x)\right) sin^3(x) + \;sin^5(x)$$

$$\boxed{sin(5\,x) = 16\,sin^5(x) - 20\,sin^3(x) + 5\,sin(x)}$$

2) Pour $x = \pi/5$ la relation donne :

$$0 = 16\,sin^5\left(\frac{\pi}{5}\right) - 20\,sin^3\left(\frac{\pi}{5}\right) + 5\,sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Soit en divisant par $sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$:

$$\boxed{16\,sin^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 20\,sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 5 = 0}$$

$sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est donc racine du polynôme :

$$16\,X^4 - 20\,X^2 + 5 = 0$$

Dont on détermine les racines en posant Y = X^2 et en trouvant les racines du polynôme :

$$16\,Y^2 - 20\,Y + 5 = 0$$

De discriminant :

$$\Delta = 400 - 4 \times 16 \times 5 = 80$$

De racines :

$$Y_1 = \frac{20-\sqrt{80}}{32} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

$$Y_2 = \frac{20+\sqrt{80}}{32} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

Il y a donc a priori deux valeurs possibles pour $sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$:

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \qquad \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Or :

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$$

Donc :

$$\frac{1}{2} = sin\left(\frac{\pi}{6}\right) < sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Donc :

$$\boxed{sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}$$

Et :

$$cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$$

$$\boxed{cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}}$$