Enoncés :

1) **Calculer pour $a \in \mathbb{R}$ la limite en $+\infty$ de la fonction suivante :**

$$f(x) = \big(Ln(x)\big)^a \sin\left(\frac{1}{Ln(x)} - \frac{1}{Ln(x+1)}\right)$$

2) **Soit f, g, h les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :**

$$f(x) = x^x, \qquad g(x) = x^{f(x)}, \quad h(x) = x^{g(x)}$$

Déterminer les limites en 0 de ces trois fonctions

3) **Calculer, pour a, b dans $\mathbb{R}^*$ la limite en 0 de la fonction suivante :**

$$f(x) = \frac{Ln\big(\cos(a\,x)\big)}{Ln\big(\cos(b\,x)\big)}$$

4) **Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction suivante :**

$$f(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi\,x}{2\,x+1}\right)\right)^{x^2}$$

5) **Calculer la limite en 2 de la fonction suivante :**

$$f(x) = (2^x + 3^x - 12)^{\tan\left(\frac{\pi}{4\,x}\right)}$$

6) **Calculer pour $a \in \mathbb{R}$ la limite en $+\infty$ de la fonction suivante :**

$$f(x) = \big(Ln(x+1)\big)^a - \big(Ln(x)\big)^a$$

7) **Calculer la limite en 0 de la fonction suivante :**

$$f(x) = \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}}$$

<u>Réponses :</u>

1) En utilisant le théorème des accroissements finis , il existe $c(x) \in \left]\frac{1}{Ln(x+1)}; \frac{1}{Ln(x)}\right[$ tel que :

$$f(x) = \big(Ln(x)\big)^a \left(\frac{1}{Ln(x)} - \frac{1}{Ln(x+1)}\right) \cos(c(x))$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{Ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{Ln(x+1)} = 0$$

Donc, par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} c(x) = 0$$

Et :

$$\lim_{x \to +\infty} cos(c(x)) = 1$$

Donc :

$$f(x) \sim \left(Ln(x)\right)^a \left(\frac{1}{Ln(x)} - \frac{1}{Ln(x+1)}\right)$$

Or :

$$\frac{1}{Ln(x)} - \frac{1}{Ln(x+1)} = \frac{Ln(x+1) - Ln(x)}{Ln(x)\ Ln(x+1)} = \frac{Ln(x) + Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - Ln(x)}{Ln(x)\ \left(Ln(x) + Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} \sim \frac{Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{Ln(x)\ Ln(x)}$$

$$\sim \frac{1}{x\left(Ln(x)\right)^2}$$

Ainsi :

$$f(x) \sim \frac{\left(Ln(x)\right)^{a-2}}{x}$$

Et :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

2) On a :

$$f(x) = e^{x\, Ln(x)}$$

Or :

$$\lim_{x \to 0^+} x\ Ln(x) = 0$$

Donc par composée :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1}$$

On en déduit :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)\ Ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{f(x)\, Ln(x)} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x^{f(x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{f(x)\, Ln(x)} = 0}$$

Puis :

$$\lim_{x \to 0^+} g(x)\ Ln(g(x)) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x)\ f(x)\ Ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x)\ Ln(x) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{g(x)\,Ln(x)} = 1}$$

3) On note que :

$$\lim_{x\to 0} cos(a\,x) = \lim_{x\to 0} cos(b\,x) = 1$$

Et on rappelle qu'en 1 : $Ln(u) \sim u - 1$

Ainsi :

$$f(x) \sim \frac{\cos(a\,x) - 1}{\cos(b\,x) - 1}$$

Or en 0 : $\cos(t) - 1 \sim -\frac{t^2}{2}$

Donc :

$$f(x) \sim \frac{-\frac{(a\,x)^2}{2}}{-\frac{(b\,x)^2}{2}} = \frac{a^2}{b^2}$$

Et :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{a^2}{b^2}}$$

4) On a :

$$f(x) = e^{x^2\,Ln\left(sin\left(\frac{\pi\,x}{2\,x+1}\right)\right)}$$

Or :

$$\lim_{x\to +\infty} sin\left(\frac{\pi\,x}{2\,x+1}\right) = 1$$

Donc :

$$x^2\,Ln\left(sin\left(\frac{\pi\,x}{2\,x+1}\right)\right) \sim x^2\,\left(sin\left(\frac{\pi\,x}{2\,x+1}\right) - 1\right)$$

Or, par division euclidienne :

$$\frac{\pi\,x}{2\,x+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\,(2\,x+1)}$$

Donc , sachant $sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = cos(t)$:

$$x^2\,Ln\left(sin\left(\frac{\pi\,x}{2\,x+1}\right)\right) \sim x^2\,\left(cos\left(\frac{\pi}{2\,(2\,x+1)}\right) - 1\right)$$

Et sachant qu'en 0 , $cos(t) - 1 \sim -\frac{t^2}{2}$:

$$x^2\, Ln\left(sin\left(\frac{\pi\, x}{2\,x+1}\right)\right) \sim -\,x^2\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\,(2\,x+1)}\right)^2 \sim -\frac{\pi^2}{32}$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{-\frac{\pi^2}{32}}}$$

5) On a :

$$f(x) = e^{tan\left(\frac{\pi}{4\,x}\right)\,Ln\,(2^x+3^x-12)}$$

Posons alors : $x = 2 + t$ alors :

$$tan\left(\frac{\pi}{4}\,x\right)\,Ln\,(2^x+3^x-12)$$

$$= tan\left(\frac{\pi}{4}\,(2+t)\right)\,Ln\,(2^{2+t}+3^{2+t}-12)$$

$$= tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\,t\right)\,Ln\left(4\,e^{t\,Ln(2)}+9\,e^{t\,Ln(3)}-12\right)$$

$$= -\frac{cos\left(\frac{\pi}{4}\,t\right)}{sin\left(\frac{\pi}{4}\,t\right)}\,Ln\,\left(1+4\left(e^{t\,Ln(2)}-1\right)+9\left(e^{t\,Ln(3)}-1\right)\right)$$

On rappelle qu'en 0 : $Ln(1+u)\sim u$ et $e^u - 1 \sim u$ donc :

$$tan\left(\frac{\pi}{4}\,x\right)\,Ln\,(2^x+3^x-12) \sim -\frac{1}{\frac{\pi}{4}\,t}\left(4\left(e^{t\,Ln(2)}-1\right)+9\left(e^{t\,Ln(3)}-1\right)\right)$$

$$\sim -\frac{4}{\pi\,t}\left(4\,t\,Ln(2)+9\,t\,Ln(3)\right) = -\frac{4\left(4\,Ln(2)+9\,Ln(3)\right)}{\pi}$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = e^{-\frac{4\,(4\,Ln(2)+9\,Ln(3))}{\pi}} = \frac{1}{(2^{16}\times 3^9)^{\frac{1}{\pi}}}}$$

6) On a :

$$f(x) = \left(Ln(x)\right)^a\left(\left(\frac{Ln(x+1)}{Ln(x)}\right)^a - 1\right)$$

$$= \left(Ln(x)\right)^a\left(\left(\frac{Ln(x)+Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{Ln(x)}\right)^a - 1\right)$$

$$= \left(Ln(x)\right)^a \left(\left(1 + \frac{Ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{Ln(x)}\right)^a - 1\right)$$

Or on rappelle qu'en 0 : $(1 + t)^a - 1 \sim a\, t$ donc :

$$f(x) \sim \left(Ln(x)\right)^a\ a\ \frac{Ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{Ln(x)}$$

$$f(x) \sim \frac{a\ \left(Ln(x)\right)^{a-1}}{x}$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

7) On a :

$$f(x) = e^{\frac{sin(x)}{x - sin(x)} Ln\left(\frac{x}{sin(x)}\right)}$$

Or en 0 :

$$\frac{x}{sin(x)} \sim 1$$

Donc :

$$Ln\left(\frac{x}{sin(x)}\right) \sim \frac{x}{sin(x)} - 1 = \frac{x - sin(x)}{sin(x)}$$

D'où :

$$\frac{sin(x)}{x - sin(x)}\ Ln\left(\frac{x}{sin(x)}\right) \sim 1$$

Et :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = e}$$