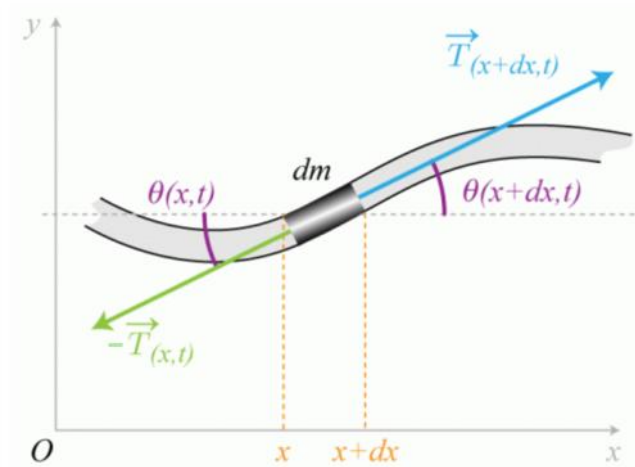


Propagation des ondes dans une corde- Réflexion et transmission

I Équation de propagation

On considère une corde rectiligne au repos et de masse linéique constante μ . Lors du passage d'une onde dans cette corde, un petit élément dm pris entre les abscisses x et $x + dx$ subit une rotation d'axe ($O z$) d'angle $\theta(x, t)$ et une translation verticale de vecteur $y\left(x + \frac{dx}{2}, t\right) \vec{j}$. Il est par ailleurs soumis à un effort normal $\vec{T}(x + dx, t)$ sur sa section droite et à un effort normal $-\vec{T}(x, t)$ sur sa section gauche. On néglige son poids devant les efforts précédents.



Les efforts ont ainsi pour composantes, dans la base choisie :

$$\vec{T}(x + dx, t) = T(x + dx, t) (\cos(\theta(x + dx, t)) \vec{i} + \sin(\theta(x + dx, t)) \vec{j})$$

$$-\vec{T}(x, t) = -T(x, t) (\cos(\theta(x, t)) \vec{i} + \sin(\theta(x, t)) \vec{j})$$

Dans l'hypothèse de petites perturbations, elles deviennent :

$$\vec{T}(x + dx, t) = T(x + dx, t) (\vec{i} + \theta(x + dx, t) \vec{j})$$

$$-\vec{T}(x, t) = -T(x, t) (\vec{i} + \theta(x, t) \vec{j})$$

Le vecteur accélération du centre de gravité de la masse dm s'écrit, en négligeant l'accélération longitudinale :

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \left(x + \frac{dx}{2}, t \right) \vec{j} \approx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} (x, t) \vec{j}$$

La deuxième loi de Newton s'écrit alors :

$$\vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) = dm \vec{a}$$

où : $dm = \mu dx$

soit, en projection dans la base du repère :

$$\begin{cases} T(x + dx, t) - T(x, t) = 0 \\ T(x + dx, t) \theta(x + dx, t) - T(x, t) \theta(x, t) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \end{cases}$$

La première équation donne que $T(x, t)$ est constant en x et dans l'hypothèse des petites perturbations, on peut le considérer indépendant du temps. Nous le noterons T , c'est la tension de la corde.

La seconde équation donne alors :

$$T \frac{\theta(x + dx, t) - \theta(x, t)}{dx} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)$$

Soit :

$$T \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)$$

Or :

$$\theta(x, t) \approx \tan(\theta(x, t)) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$$

Ainsi :

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)$$

Finalement :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$$

On obtient une équation de d'Alembert de la forme :

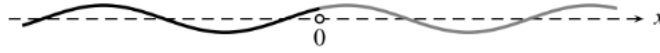
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$$

Les ondes se propagent donc dans la corde à la vitesse :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

II Onde transmise et onde réfléchi :

On considère maintenant deux cordes de masses linéiques différentes, celle de gauche numérotée 1 a une masse linéique μ_1 et celle de droite numérotée 2, μ_2 . Les deux cordes sont reliées en un point O pris comme origine d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. On suppose la jonction en O de masse négligeable et la corde soumise à la même tension de part et d'autre.



Une onde incidente sinusoïdale se propageant dans la corde 1 donne naissance à une onde transmise et une onde réfléchie. La continuité du déplacement en O pour tout t imposant la même pulsation aux trois ondes, celles-ci peuvent être décrites par des fonctions de la forme :

$$y_i(x, t) = y_{0i} \cos(\omega t - k_i x)$$

$$y_r(x, t) = y_{0r} \cos(\omega t + k_r x)$$

$$y_t(x, t) = y_{0t} \cos(\omega t - k_t x)$$

avec, par continuité en O du déplacement vertical :

$$y_i(0, t) + y_r(0, t) = y_t(0, t)$$

Et, l'équilibre d'un petit élément en O se traduisant par la continuité en O de la composante verticale de la tension $T \frac{\partial y}{\partial x}$ on a :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0^-, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0^+, t)$$

ce qui se traduit par

$$\frac{\partial y_i}{\partial x}(0, t) + \frac{\partial y_r}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y_t}{\partial x}(0, t)$$

Ce qui conduit aux relations :

$$\begin{cases} y_{0i} + y_{0r} = y_{0t} \\ k_i y_{0i} - k_r y_{0r} = k_t y_{0t} \end{cases}$$

Or on a, en désignant par c_1 la vitesse de propagation des ondes dans la corde 1 et c_2 dans la corde 2 :

$$\omega = k_i c_1 = k_r c_1 = k_t c_2$$

Le système devient :

$$\begin{cases} y_{0i} + y_{0r} = y_{0t} \\ \frac{y_{0i}}{c_1} - \frac{y_{0r}}{c_1} = \frac{y_{0t}}{c_2} \end{cases}$$

On introduit alors les coefficients de réflexion et de transmission :

$$r_a = \frac{y_{0r}}{y_{0i}}, \quad t_a = \frac{y_{0t}}{y_{0i}}$$

Le système devient :

$$\begin{cases} 1 + r_a = t_a \\ \frac{1}{c_1} - \frac{r_a}{c_1} = \frac{t_a}{c_2} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} r_a = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \\ t_a = \frac{2 c_2}{c_2 + c_1} \end{cases}$$

A noter que si $c_2 > c_1$ on a $r_a > 0$ et l'onde réfléchie est bien en phase avec l'onde incidente.

En revanche, si $c_2 < c_1$ on a $r_a < 0$ et l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente.

L'onde transmise est dans tous les cas en phase avec l'onde incidente.

III Aspects énergétiques :

Considérons, dans une corde de masse linéique constante μ , une onde sinusoïdale se propageant à la vitesse c dans le sens des x croissants. Elle est représentée par une fonction de la forme :

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t - k x)$$

où $\omega = k c$.

En reprenant la description de la partie I, l'énergie transférée à travers une section à l'abscisse x par la partie gauche sur la partie droite entre les instants t et $t + dt$ est égale au travail de la force $-\vec{T}(x, t)$ exercée par la partie gauche sur la partie droite, soit :

$$\delta W = -\vec{T}(x, t) \cdot \vec{v}(x, t) dt$$

où $\vec{v}(x, t)$ est le vecteur vitesse du centre de la section, les deux vecteurs étant définis, au premier ordre par :

$$\begin{aligned} \vec{T}(x, t) &= T \left(\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \vec{j} \right) \\ \vec{v}(x, t) &= \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \vec{j} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\delta W = -T \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) dt$$

La puissance instantanée transmise par l'onde à l'abscisse x à l'instant t est donc :

$$p(x, t) = \frac{\delta W}{dt} = -T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Or :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k y_0 \sin(\omega t - k x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_0 \sin(\omega t - k x)$$

Donc :

$$p(x, t) = T k \omega y_0^2 \sin^2(\omega t - k x)$$

Et la valeur moyenne sur une période est :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} T k \omega y_0^2$$

où : $k = \frac{\omega}{c}$ donc :

$$\mathcal{P} = \frac{T \omega^2 y_0^2}{2 c}$$

Application au cas d'une réflexion et d'une transmission :

Reprenons la situation du II et notons $\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_r, \mathcal{P}_t$ les puissances moyennes transportées respectivement par les ondes incidente, réfléchi et transmise. Alors :

$$\mathcal{P}_i = \frac{T \omega^2 y_{0i}^2}{2 c_1}, \mathcal{P}_r = \frac{T \omega^2 y_{0r}^2}{2 c_1}, \mathcal{P}_t = \frac{T \omega^2 y_{0t}^2}{2 c_2}$$

(*) $\mathcal{P}_r$ est la puissance moyenne transportée dans le sens des x décroissants

On introduit alors les coefficients de réflexion et de transmission en puissance :

$$R_p = \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i}, \quad T_p = \frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_i}$$

Ces coefficients s'expriment alors ainsi :

$$R_p = \frac{\frac{T \omega^2 y_{0r}^2}{2 c_1}}{\frac{T \omega^2 y_{0i}^2}{2 c_1}} = \frac{y_{0r}^2}{y_{0i}^2}$$

$$T_p = \frac{\frac{T \omega^2 y_{0t}^2}{2 c_2}}{\frac{T \omega^2 y_{0i}^2}{2 c_1}} = \frac{c_1 y_{0t}^2}{c_2 y_{0i}^2}$$

Ainsi :

$$R_p = r_a^2 = \left(\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \right)^2$$

$$T_p = \frac{c_1}{c_2} t_a^2 = \frac{c_1}{c_2} \left(\frac{2 c_2}{c_2 + c_1} \right)^2 = \frac{4 c_1 c_2}{(c_2 + c_1)^2}$$

On constate alors que :

$$R_p + T_p = \frac{c_1^2 - 2 c_1 c_2 + c_2^2}{(c_2 + c_1)^2} + \frac{4 c_1 c_2}{(c_2 + c_1)^2} = \frac{c_1^2 + 2 c_1 c_2 + c_2^2}{(c_2 + c_1)^2} = 1$$

Ce qui traduit la conservation de l'énergie.