Travail mécanique, énergies cinétique, potentielle, mécanique

1. <u>L'expérience du lâcher de corps de Galilée à la tour de Pise</u>

Les lois de la mécanique commencent par l'observation de la chute des corps, à l'origine de tous les concepts mécaniques, force, travail et énergie et cela commence avec l'intuition de Galilée dans une expérience qu'il fit à la tour de Pise en lâchant une balle de mousquet et un boulet de canon du haut de cette tour en même temps afin de vérifier, contrairement à l'idée d'Aristote, que le boulet ne tomberait pas plus vite que la balle de mousquet.

<u>Intuition de Galilée</u> :

> **Tous les corps chutent dans le vide de la même façon, indépendamment de leur masse, des matériaux qui les composent et de leur forme.**

Bien sûr, l'expérience de Galilée ne se fit pas dans le vide mais sur la hauteur de chute considérée, l'action de la force de frottement de l'air était si négligeable que l'expérience pouvait y être assimilée.

2. <u>Nature du mouvement de la chute des corps en un lieu donné</u>

Nous allons mettre en évidence, de façon approchée, la loi locale de la chute des corps dans le vide à l'aide d'un simple cliché d'une balle de golf lâchée sans vitesse initiale obtenu par chronophotographie.

<u>Expérience</u> :

On réalise par chronophotographie au 1/30 de seconde le cliché d'une balle de golf lâchée sans vitesse initiale sur une hauteur d'un peu moins de deux mètres.

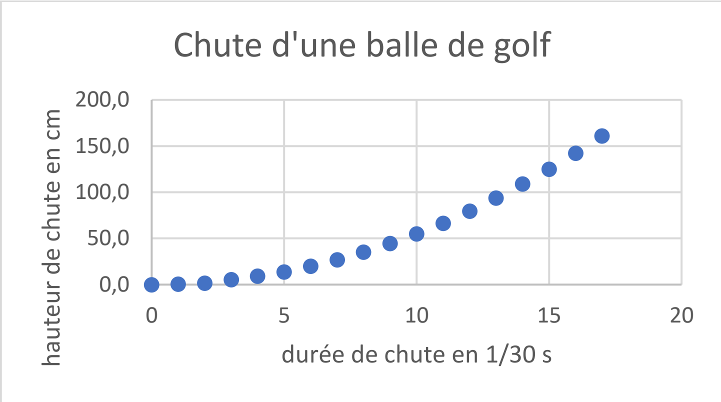
A l’aide d’un logiciel comme PowerPoint, nous avons alors procédé comme suit :

- inséré en faisant un copier-coller l’image de chronophotographie dans PowerPoint
- zoomé suffisamment
- ajouté une flèche verticale pour prendre la hauteur de la règle jaune comme indiqué sur l’image ci-dessous :
- ajouté une flèche verticale pour prendre la hauteur de chute définie comme étant la distance d entre la position du centre de la balle à l’instant du lâcher et sa position à un autre instant. Pour cela, par un clic droit sur la souris en ayant sélectionné la flèche puis sur taille pour obtenir sa hauteur et la modifier à chaque mesure, de façon à ce que la base de la flèche atteigne la position suivante

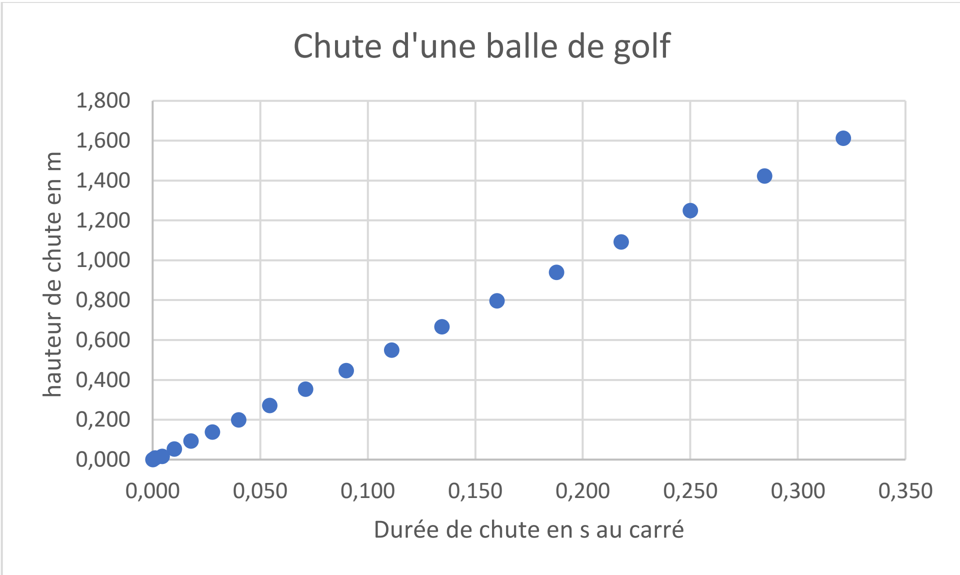
Nous avons alors reporté les différentes hauteurs mesurées avec l’application dans la ligne d du tableau ci-dessous aux différents instants indiqués en 1/30 s dans la ligne t. A l’aide d’un tableur et, grâce à la mesure donnée par l’application de la règle, nous avons ensuite converti ces hauteurs en centimètres (ligne h du tableau).

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
h	0,0	0,7	1,5	5,3	9,2	13,8	19,9	27,0	35,2	44,6	54,9	66,5	79,6	93,8	109,1	125,0	142,3	161,2
d	0	0,07	0,15	0,52	0,9	1,35	1,95	2,65	3,45	4,37	5,38	6,52	7,8	9,2	10,7	12,25	13,95	15,8

Avec le tableur, nous avons alors pu tracer le nuage de points défini par les couples (t,h), obtenant le graphique ci-dessous :



Ces points semblant faire partie d'une courbe du second degré de la forme $h = c\,t^2$, nous avons, pour le vérifier, tracé le nuage de points associé à la hauteur de chute en fonction du carré du temps et obtenu le graphique suivant.



Ce second graphique fait clairement apparaitre visuellement, sans donc avoir à utiliser une méthode de régression linéaire, une proportionnalité entre la hauteur de chute et le carré de la durée de chute, que l'on peut donc exprimer mathématiquement par une relation de la forme :

$$h = c\,t^2$$

où c est le coefficient directeur de la portion de droite du graphique, à savoir le quotient de la dernière hauteur de chute (1,612 m) par le carré de la dernière durée de chute (0,321 s^2) soit :

$$c = \frac{1{,}612}{0{,}321} \approx 5\,m\,s^{-2}$$

La loi de la chute libre s'exprime ainsi sous la forme :

$$\boxed{h = 5\,t^2}$$

où h est en mètres et t en secondes.

La précision de nos mesures de hauteurs h à l'aide de Powerpoint n'étant pas très grande, nous avons estimé le coefficient de 5 obtenu à une précision de 1 chiffre significatif.

Des mesures faites à Paris, avec des instruments de mesure plus précis dont nous ne disposons pas, auraient donné une valeur plus précise:

$$h = 4{,}904\ t^2$$

Vers une notion de vitesse instantanée

Connaissant la hauteur sur laquelle chute un objet lâché sans vitesse initiale dans le vide pendant une durée de t secondes, on se propose maintenant de déterminer à cet instant t la vitesse de l'objet. Pour cela, nous allons commencer par établir cette notion pour $t = 1\ s$ autrement dit répondre à la question : **quelle est la vitesse de l'objet au bout d'une seconde de chute ?**

La réponse suppose définir ce que l'on entend par vitesse. On sait tout d'abord définir une **vitesse moyenne** entre deux instants t_1 et t_2 comme étant le quotient de la distance d parcourue par la durée du parcours $\Delta t = t_2 - t_1$. Soit mathématiquement :

$$v_{moy} = \frac{d}{\Delta t}$$

Mais si on veut définir une vitesse à un instant donné, comme au bout d'une seconde de chute, on parle de **vitesse instantanée** et il faut définir ce concept proprement. Pour commencer, nous allons calculer la vitesse entre l'instant t_1 correspondant à 1 seconde de chute et un instant t_2 ultérieur, très proche du premier, qu'on peut écrire sous forme $t_2 = 1 + \Delta t$ et où Δt sera pris très petit, nous verrons même un peu plus loin, infiniment petit, concept que nous définirons proprement.

Mais commençons avec des valeurs finies, par exemple $\Delta t = 0{,}1\ s$, donc $t_2 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1\ s$. On se propose alors d'approcher la valeur de la vitesse instantanée comme étant la vitesse moyenne entre ces deux instants. Pour cela, il nous faut connaitre la distance parcourue pendant cette durée Δt. On l'obtient grâce à la loi de la chute libre car, en utilisant la notation mathématique de fonction $h(t) = 4{,}904 \times\ t^2$:

Au bout de $t_1 = 1\ s$ de chute, la hauteur de chute est :

$$h(1) = 4{,}904 \times\ 1^2 = 4{,}904\ m$$

Au bout de $t_2 = 1{,}1\ s$ de chute, la hauteur de chute est :

$$h(1{,}1) = 4{,}904 \times\ 1{,}1^2 = 5{,}934\ m$$

La distance parcourue entre ces deux instants est donc :

$$d = 5{,}934 - 4{,}904 = 1{,}030\ m$$

La vitesse moyenne entre ces deux instants est alors :

$$v_{moy} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{1{,}030}{0{,}1} = 10{,}30\ m/s$$

Nous sommes donc tentés de penser que la vitesse instantanée au bout d'une seconde de chute est d'environ $10{,}30\ m/s$ mais quelque chose nous gêne, car nous savons intuitivement que sur cette durée, si faible soit elle, l'objet s'est mis à accélérer. D'ailleurs si nous refaisons le même calcul mais pour une durée $\Delta t = 0{,}5\ s$ nous obtenons :

$$v_{moy} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{h(1{,}5) - h(1)}{0{,}5} = \frac{4{,}904 \times\ 1{,}5^2 - 4{,}904 \times\ 1^2}{0{,}5} = 12{,}26\ m/s$$

et nous obtenons ainsi une valeur assez supérieure à la précédente. Alors que faire ?

En fait, nous pouvons observer que, plus nous prenons Δt petit, plus la valeur de la vitesse moyenne se rapproche d'une valeur fixe. Afin de s'en convaincre, complétons le tableau ci-dessous en notant que la vitesse moyenne se calcule avec la formule :

$$v_{moy} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{h(1 + \Delta t) - h(1)}{\Delta t} = \frac{4{,}904 \times\ (1 + \Delta t)^2 - 4{,}904 \times\ 1^2}{\Delta t}$$

$\Delta t\ (s)$	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001	0,0001
$v_{moy}\ (m/s)$	12,26	10,30	10,05	9,8570	9,8129	9,8085

Ceci étant, plutôt que de calculer la vitesse moyenne avec la formule précédente, faisons un peu de l'algèbre pour la simplifier. La distance parcourue entre deux instants t et $t + \Delta t$ est en effet :

$$d = h(t + \Delta t) - h(t) = 4{,}904 \times\ (t + \Delta t)^2 - 4{,}904 \times\ t^2$$

En factorisant cette expression doublement (par facteur commun puis identité remarquable) nous obtenons :

$$d = 4{,}904 \times (t + \Delta t - t)\ (t + \Delta t + t) = 4{,}904 \times \Delta t\ (2\ t + \Delta t)$$

L'expression formelle de la vitesse moyenne entre t et Δt s'en déduit :

$$v_{moy} = \frac{d}{\Delta t} = 4{,}904\ \ (2\ t + \Delta t) = 9{,}808\ t + 4{,}904\ \Delta t$$

Nous voyons alors qu'en prenant Δt de plus en plus petit pour un instant t quelconque choisi et fixé , la vitesse moyenne se rapproche d'une valeur fixe qui est ce que nous appelons **la vitesse instantanée à l'instant t** considéré. Nous avons donc :

$$\boxed{\boldsymbol{v = 9{,}808\ t}}$$

Cette façon de procéder revient à utiliser le concept mathématique de dérivée d'une fonction, ce qui se traduit par une écriture de la forme :

$$\boldsymbol{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \frac{dh}{dt}}$$

Le d de dh ou dt signifie différence infinitésimale, c'est-à-dire pouvant être rendue aussi petite que l'on veut (par la pensée car ces quantités infinitésimales n'ont pas de réalité physique, puisqu'on ne peut pas mesurer en dessous d'une certaine précision). Il est important de savoir distinguer les écritures Δt et dt. La première est une différence finie (en physique, cela revient à dire mesurable), la seconde est une différence infinitésimale, c'est-à-dire que l'on imagine aussi petite que l'on veut, ou encore qu'on fait tendre vers 0. Nous avons vu ci-dessus que le rapport des deux quantités infinitésimales dh ou dt tendait vers une valeur précise quand dt tendait vers 0 et que cette valeur ne pouvait s'obtenir que par le calcul formel mathématique (concept de dérivée).

On retient :

La vitesse instantanée est la vitesse moyenne entre deux instants infiniment proches. C'est également la dérivée de la hauteur de chute par rapport à la durée de chute. Dans le cas de la chute des corps dans le vide, la vitesse instantanée est proportionnelle à la durée de chute

On définit alors un concept d'accélération moyenne entre deux instants t_1 et t_2 de façon analogue à celui de vitesse moyenne comme étant le quotient de l'augmentation de vitesse entre ces deux instants par la durée écoulée entre ces deux instants $\Delta t = t_2 - t_1$. Soit mathématiquement :

$$a_{moy} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{\Delta t}$$

On définit alors de façon analogue un concept d'accélération instantanée, qui sera la dérivée de la vitesse de chute :

$$\boldsymbol{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}}$$

et on retient :

L'accélération instantanée est l'accélération moyenne entre deux instants infiniment proches. C'est également la dérivée de la vitesse de chute par rapport à la durée de chute. Dans le cas de la chute des corps dans le vide, l'accélération instantanée est constante et égale à l'accélération moyenne entre deux instants quelconques. Elle est notée g et appelée accélération de la pesanteur ou encore intensité de pesanteur. Sa valeur dépend du lieu où on se trouve.

Sur la Lune, l'intensité de pesanteur est environ 5 fois plus faible que sur Terre, ce qui explique qu'un marteau que l'on lâche, y tombe plus lentement que sur Terre. g dépend également du lieu où on en fait la mesure sur Terre et plus précisément de la latitude de ce lieu car la rotation de la Terre autour de son axe des pôles génère une force centrifuge comme sur un manège.

On montre par les lois relatives à la gravitation universelle ou on observe par mesure que g décroit avec l'altitude mais ne perd 1% de sa valeur qu'à 32 km d'altitude, soit en pleine stratosphère. Sa valeur, considérée avec seulement deux chiffres significatifs est de 9,8 m/s/s soit la même qu'à la surface de la Terre en n'importe lequel de ces points.

Conclusion de l'expérience de la chute de la balle de golf :

Le mouvement du centre de gravité de la balle sur les premiers mètres de chute, assimilable à un mouvement dans le vide car la résistance de l'air a une action négligeable devant l'attraction terrestre, est un mouvement vertical dirigé vers le bas, d'accélération constante notée g. On dit que c'est un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Des mesures que nous limitons ici à trois chiffres significatifs conduisent aux valeurs suivantes de g à la surface de la Terre en trois lieux de latitudes différentes :

Lieux	Pôle Nord	Paris	Equateur
$g \quad (m\, s^{-2})$	9,83	9,81	9,78

Formulation générale de la loi de la chute des corps :

En un lieu donné, tout corps lâché sans vitesse initiale voit son centre d'inertie se déplacer initialement (tant que la force de gravité agissant sur lui peut être considérée comme constante pour la précision souhaitée) dans un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération notée g et appelée accélération de la pesanteur.

Allons un peu plus loin en tentant d'éliminer le temps dans les équations horaires de ce mouvement. Si on note h, la distance parcourue en mètres par le centre de gravité (hauteur de chute) et t la durée écoulée en secondes depuis l'instant du lâcher, v la vitesse à l'instant t, alors on a :

$$\begin{cases} v = g\, t \\ h = \dfrac{1}{2}\, g\, t^2 \end{cases}$$

De la première équation, on en déduit :

$$t = \frac{v}{g}$$

En reportant dans la seconde, on peut ainsi éliminer le temps t :

$$h = \frac{1}{2}\, g\, \left(\frac{v}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{g}$$

$$g\,h = \frac{1}{2}\,v^2$$

En multipliant par la masse des deux côtés, il en résulte :

$$\boxed{\boldsymbol{m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2}}$$

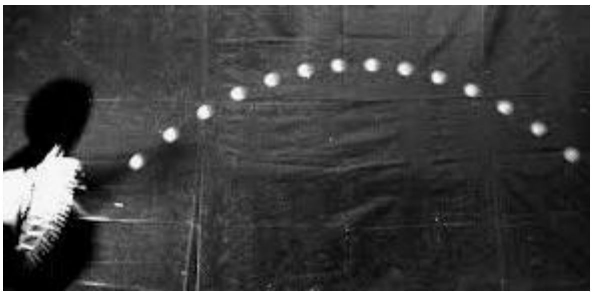
Cette relation, déduite des équations horaires du mouvement, fait apparaitre deux concepts : celui de travail du poids par la quantité $m\,g\,h$ et celui d'énergie cinétique par la quantité $\frac{1}{2}\,m\,v^2$.

Nous allons voir plus loin comment cela se généralise.

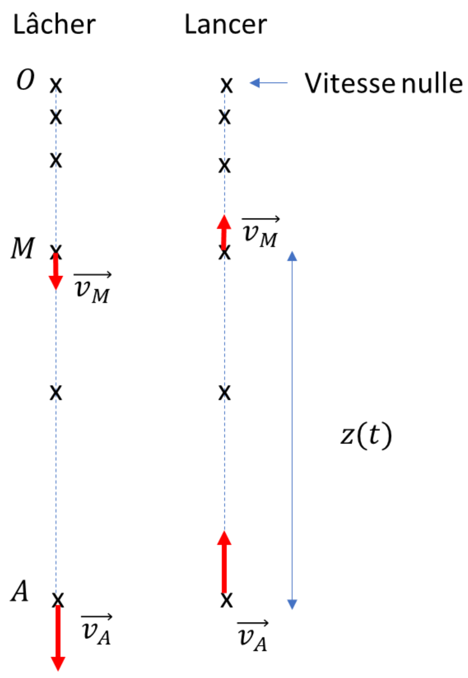
3. Algébrisation du concept de vitesse et d'accélération

Si, au lieu de lâcher la balle de golf, nous l'avions lancée vers le haut et procédé à un enregistrement par chronophotographie, nous aurions observé par un mouvement uniformément décéléré et dont la décélération serait égale à g.

On peut s'en convaincre aisément en réalisant un cliché par chronophotographie du lancé d'une balle sous différents angles et en notant la forme parabolique de la trajectoire et une symétrie dans le mouvement, quelque soit l'angle sous lequel on lance la balle.



Nous pouvons alors déduire les caractéristiques du mouvement ascendant d'un corps lancé verticalement avec une vitesse initiale v_A en un point A de celles de son mouvement descendant de ce corps à partir de sa position la plus haute atteinte en un point O.



En effet, en retombant, le corps obéit à la loi établie précédemment. Donc les vitesses instantanées en un même point M des deux trajectoires sont les mêmes mais les sens de ces vitesses sont opposés.

Dans le cas du mouvement de lancer, il serait alors préférable de décrire la position du centre d'inertie par son altitude z considérée à partir de la position de libération A de la balle. Nous aurions ainsi une vitesse instantanée qui décroit jusqu' à s'annuler, définie par :

$$\boldsymbol{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}}$$

Mais , en reprenant la définition donnée pour l'accélération instantanée dans le sens du mouvement, nous aurions, pendant cette phase ascensionnelle :

$$\boldsymbol{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = -g < 0}$$

Si, de plus, nous voulions nous intéresser au mouvement ascensionnel suivi du mouvement de redescente, il serait plus judicieux de conserver un même axe de description pour les deux mouvement en posant, pour $\vec{k}$ vecteur unitaire vertical, dirigé vers le haut :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = z\,\vec{k}}$$

On serait alors amené tout naturellement à définir un vecteur vitesse et un vecteur accélération instantanés par :

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}\,\vec{k} = \frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}}\,\vec{k} = \frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{OM}}{\boldsymbol{dt}}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}\,\vec{k} = \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}\,\vec{k} = \frac{\boldsymbol{d}\vec{v}}{\boldsymbol{dt}}$$

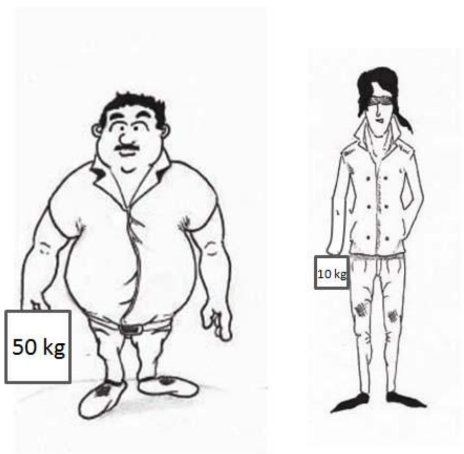
Les deux phases de montée et descente seraient alors décrites de la même façon avec des grandeurs algébriques. On aurait en effet :

- en phase de montée : $v > 0,\ a < 0$
- en phase de descente : $v < 0,\ a < 0$

Ces notions seront généralisées à trois dimensions un peu plus loin, dans ce qu'on appelle la **cinématique du point**, ou l'art de décrire un mouvement.

4. **Concept de force** :

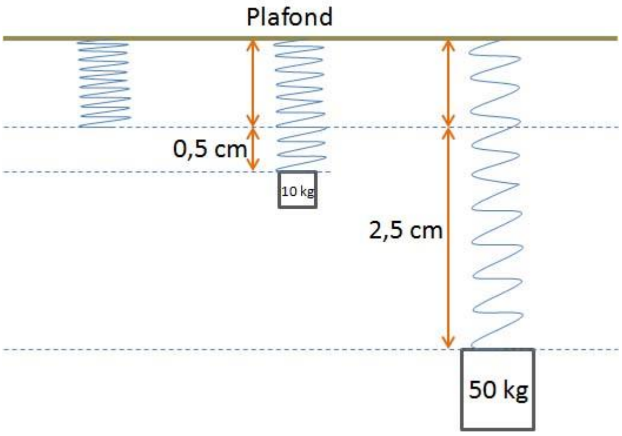
Ce concept est dû à Newton. Il met en relation un mouvement avec sa cause, la force qui le produit.



Dessin de Pierric Gry

Idées de base :

- Un individu pouvant soulever d'une main une masse de 50 kg est plus fort qu'un individu ne pouvant soulever que 10 kg
- Suspendue à un ressort suffisamment raide, une masse de 50 kg allonge ce dernier 5 fois plus que ne le fait une masse de 10 kg avec ce même ressort



Un ressort produit donc un allongement proportionnel à la masse qu'on y suspend, pourvu que cette masse ne dépasse pas une certaine valeur (On dit qu'il fonctionne dans un domaine linéaire car son allongement est fonction linéaire de la masse qui y est suspendue). Quand on enlève la masse, il reprend sa longueur initiale. (On dit qu'il fonctionne dans un domaine élastique)

L'action qui fait qu'un objet initialement immobile dans un référentiel donné, se met en mouvement est appelée force. Ainsi en est-il d'un morceau de métal attiré par un aimant, ce dernier exerçant une force magnétique sur le morceau de métal. Un autre exemple est celui d'un objet que l'on lâche et qui tombe vers le sol, attiré par la force gravitationnelle.

Une force a quatre caractéristiques :

- **Un point d'application**
- **une direction, la droite sur laquelle se déplace le point d'application, sous l'action de cette seule force à partir de l'immobilité**
- **Un sens, celui du déplacement sur la direction précédente**
- **Une intensité ou valeur ou norme.**

Une force peut donc être représentée mathématiquement par un **vecteur**.

Pour mesurer l'intensité d'une force et surtout en définir l'étalon unité, le Newton, on va donc se servir d'un ressort qu'il va falloir convenablement graduer et qu'on appellera **dynamomètre**. Ainsi pour mesurer le poids d'un objet, on le suspendra à ce ressort et on mesurera sur ce ressort une valeur en Newton qui est proportionnelle à son allongement. Ce faisant, le point d'accroche du dynamomètre subira une translation, donnant la direction et le sens du vecteur-force. En désignant alors par Δ l'allongement en mètres de ce ressort, on définira l'intensité de ce vecteur-force par une relation de proportionnalité de la forme :

$$F = k\,\Delta$$

où k est une constante arbitraire qui reste à définir afin d'établir l'unité de force, le Newton. Pour cela , on commence par observer quelques propriétés essentielles relatives au poids et aux ressorts utilisés dans leur domaine linéaire.

Voyons d'abord la propriété relative au poids notamment son caractère localement constant.

Première observation : On peut observer que l'allongement d'un ressort auquel on a accroché une masse varie très faiblement pour des altitudes allant du niveau de la mer à la stratosphère (on peut montrer qu'il varie de l'ordre de 1% entre l'altitude 0 (niveau de la mer) et l'altitude 32 kms (dans la stratosphère).

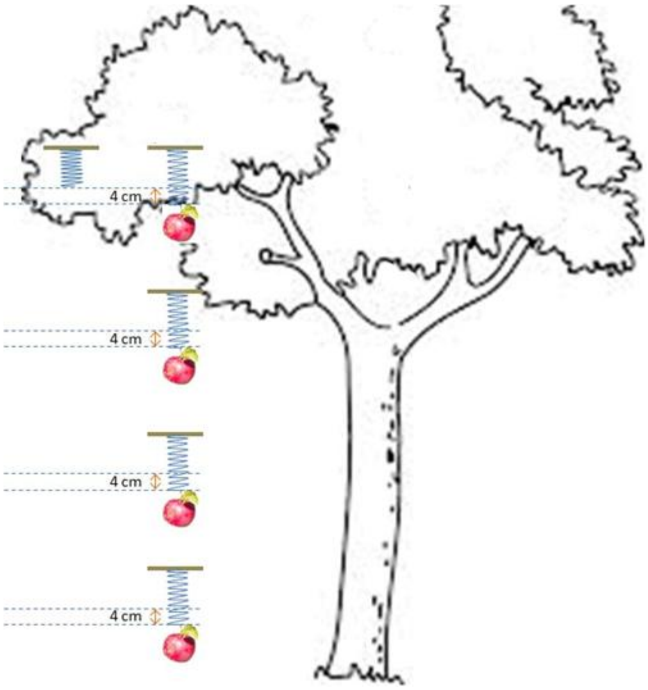


Illustration d'une pomme suspendue à un dynamomètre à des altitudes différentes

On peut donc considérer aux précisions où on travaille (2 à 3 chiffres significatifs) l'intensité de la force d'attraction terrestre appelée poids comme constante sur 32 kms d'altitude.

Deuxième observation :

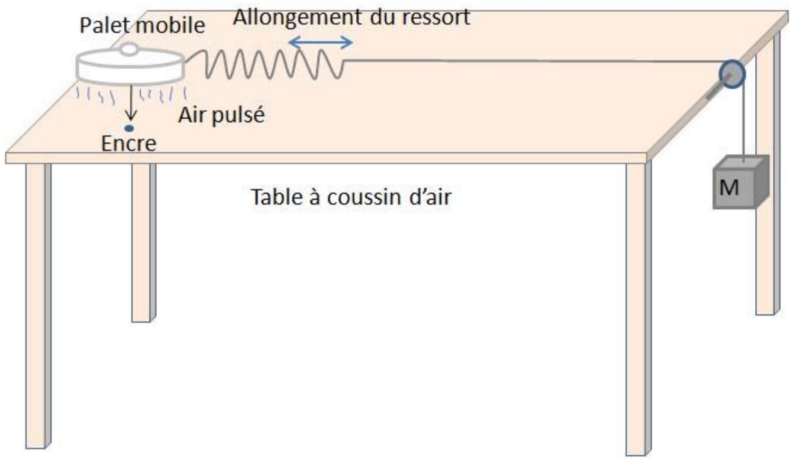
Si on lâche un corps dans le vide (expérience faite dans un tube à vide), un enregistrement par chronophotographie montre que le mouvement du centre de gravité est vertical, rectiligne, uniformément accéléré d'accélération notée g.

Conclusion des deux observations relatives au poids

Dans l'expérience du lâcher d'un corps dans le vide, le mouvement est rectiligne à accélération constante (on dit uniformément accéléré) et sa cause est une force constante en direction, sens et intensité, appelée poids du corps.

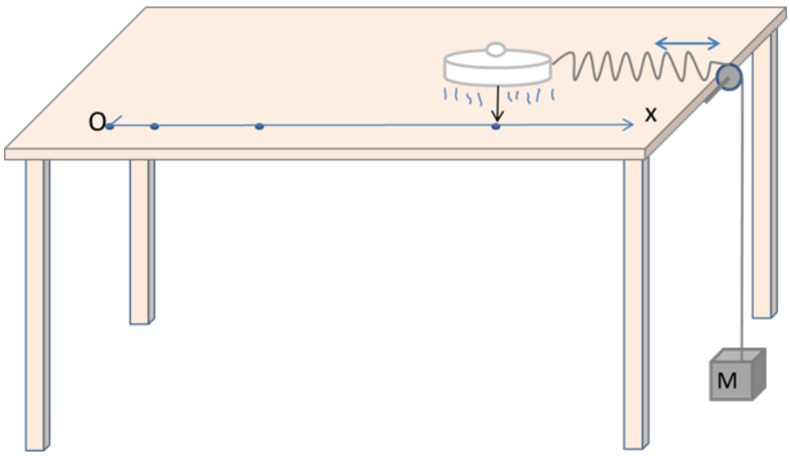
Voyons maintenant la propriété relative au ressorts :

L'expérience du mouvement d'un corps soumis à un vecteur force constant et dans la direction du mouvement depuis une position immobile peut être étendue à l'aide d'une table à coussin d'air.



Un palet en sustentation au-dessus de la table, peut alors se déplacer librement (sans frottements) sur cette table dans un plan horizontal. On peut alors exercer sur ce dernier, par l'intermédiaire d'un ressort, une force produite par l'allongement de ce ressort. On peut faire varier cet allongement Δ par un système de poulie et de masse variable. Par ce dispositif, l'allongement du ressort reste constant au cours du mouvement.

On observe alors que pour un allongement de ressort donné, le mouvement du centre de gravité du palet est uniformément accéléré (on pourrait le vérifier aussi par chronophotographie, comme dans notre expérience de lâcher de balle de golf)



On observe également que la valeur de cette accélération double si l'allongement double, triple si l'allongement triple, etc… Plus généralement, on en déduirait que l'accélération est à masse donnée, proportionnelle à l'allongement.

Si, pour un allongement donné, on double la masse du palet, alors l'accélération a est divisée par deux, si on triple la masse, divisée par trois et ainsi de suite.. Plus précisément, on en déduirait que l'accélération est inversement proportionnelle à la masse m.

On obtient ainsi une relation de la forme :

$$a = k\,\frac{\Delta}{m}$$

Soit encore :

$$m\,a = k\,\Delta$$

Afin d'obtenir une formule simple, on convient alors de prendre cette constante k pour définir l'intensité de la force en Newton de symbole N, ce qui s'écrit $F = k\,\Delta$. . Cela permet ainsi de faire apparaitre une relation simple appelée **seconde loi de Newton**, dans une version pour l'instant monodimensionnelle sans usage de vecteurs pour simplifier, mais qui va être étendue un peu plus loin.

$$\boldsymbol{F = m\,a}$$

On arrive ainsi à la définition légale de l'unité de force, le Newton :

Un Newton est l'intensité d'une force qui appliquée seule et de façon constante en direction, sens et intensité sur une masse ponctuelle initialement au repos confère au centre d'inertie de cette masse un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\boldsymbol{1\ m\,s^{-2}}$.

5. <u>Le poids terrestre d'un corps</u>

On appelle poids d'un corps, la force résultant de l'interaction gravitationnelle de la Terre avec ce corps et de la ou les forces d'inerties liées au fait que la Terre tourne sur elle-même à la manière d'un manège et n'est pas un référentiel dit Galiléen.

Dans l'expérience du lâcher d'un corps dans le vide, le poids noté $\vec{P}$ est la seule force agissant dans une direction qui n'est pas rigoureusement verticale, à cause des forces d'inerties mais qui peut y être assimilée si on se limite à une précision pas trop élevée.

Or une telle force est la cause d'un mouvement de vecteur accélération $\vec{a} = \vec{g}$. On en déduit, par la seconde loi de Newton :

$$\boldsymbol{\vec{P} = m\,\vec{g}}$$

Cette formule reste valable en tout lieu de l'univers, $\vec{g}$ étant le vecteur intensité de pesanteur local.

6. <u>La deuxième loi de Newton - version générale:</u>

Nous avons vu précédemment que pour un mouvement ascensionnel dans le vide suite à un lancer vertical, ou un mouvement de chute libre dans le vide suite à un lâcher, nous obtenons un mouvement décéléré dans le premier cas et accéléré dans le second mais le même vecteur accélération $\vec{g}$ dans les deux cas et la même relation $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

La formule précédente s'étend alors au mouvement général du centre d'inertie d'un système matériel quelconque sous l'action d'un ensemble de forces qui ne sont plus nécessairement constantes et dans la direction du mouvement, dont la somme vectorielle est appelée **résultante des forces extérieures** souvent notée $\sum \vec{F}^{ext}$

On décompose pour cela la résultante notée pour simplifier $\vec{F}$ dans une base orthogonale quelconque $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ sous forme :

$$\vec{F} = F_x\,\vec{\imath}, + F_y\,\vec{\jmath}, + F_z\,\vec{k}$$

Si on note alors M la position du centre d'inertie à un instant donné, N, R, S les projetés respectifs de M sur les trois axes de référence, alors, on peut considérer les mouvements des projetés comme des mouvements monodimensionnels s'effectuant sur les trois axes de références sous l'action de forces agissant selon la direction de ces axes . On applique alors sur chaque axe, la relation obtenue précédemment, à savoir :

$$\begin{cases} F_x = m\,a_x \\ F_y = m\,a_y \\ F_z = m\,a_z \end{cases}$$

où a_x (resp. a_y, a_z)est la composante sur $\vec{\imath}$ (resp. $\left(\vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ du vecteur accélération du point N (resp. (R, S))

On définit ainsi le **vecteur accélération instantanée** du point M par :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a} = a_x\,\vec{\imath} + a_y\,\vec{\jmath} + a_z\,\vec{k}}}$$

De la même façon, on définit le **vecteur vitesse instantanée** :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{v} = v_x\,\vec{\imath} + v_y\,\vec{\jmath} + v_z\,\vec{k}}}$$

la position du centre d'inertie étant décrite par :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

Comme on a :

$$v_x = \lim_{\tau \to 0} \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} = \frac{dx}{dt}$$

Et des relations analogues pour v_y , v_z, on écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{v} = \frac{dx}{dt}\,\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}}}$$

De même :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\,\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\,\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\,\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{k}}}$$

La description ainsi opérée à l'aide de coordonnées géométriques et de leurs dérivées temporelles est appelée **cinématique** (cinéma = mouvement). La cinématique employée ci-dessus est une cinématique avec des coordonnées cartésiennes. Il en existe d'autres qui peuvent s'avérer plus appropriées (coordonnées polaires, cylindriques, sphériques, repère de Frénet,…)

La seconde loi de Newton dans sa formulation générale s'écrit alors :

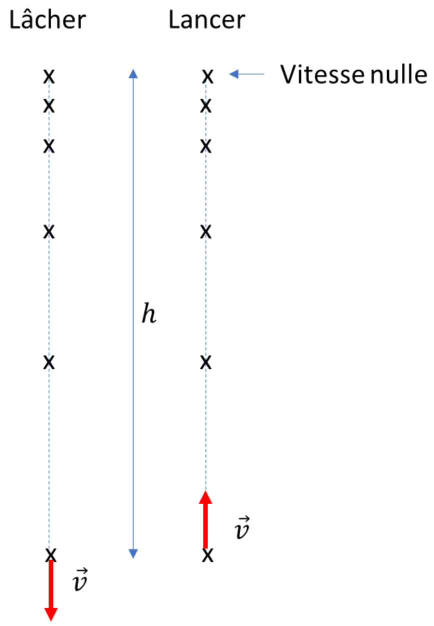
$$\boldsymbol{\vec{F} = m\,\vec{a}}$$

La somme des forces extérieures agissant sur un système matériel (appelée résultante des forces extérieures) est égale au produit de la masse de ce système par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

7. Concepts de travail d'une force et d'énergie cinétique dans le cas d'un mouvement rectiligne et d'un vecteur- force constant et dans la direction du mouvement

Reprenons les observations précédentes dans le cas simple d'un mouvement monodimensionnel sur un axe et d'un vecteur force résultant constant agissant dans la direction de cet axe.

Un tel exemple de mouvement est celui d'un objet lâché dans le vide sans vitesse initiale. Mais c'est aussi le cas d'un objet lancé verticalement dans le vide.



Nous avons alors dans les deux cas :

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

Dans le cas du lâcher, le poids agit dans le sens du mouvement, on dit que le poids exerce un travail moteur, qui contribue à augmenter l'énergie cinétique de la balle. Comme la vitesse initiale de la balle est nulle, son énergie cinétique aussi, la relation ci-dessus peut s'écrire :

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{1}{2}\,m\,0^2 = \|\vec{P}\| \times h$$

ce qui se traduit par : la variation d'énergie cinétique de la balle est égale au travail du poids sur la hauteur de chute.

Dans le cas du lancer vertical, le poids agit dans le sens opposé au mouvement, on dit que le poids exerce un travail résistant, qui contribue à diminuer l'énergie cinétique de la balle jusqu'à l'annuler. La relation s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}\,m\,0^2 - \frac{1}{2}\,m\,v^2 = -\|\vec{P}\| \times h$$

Ce qui se traduit par le même énoncé en définissant le travail du poids quand il est résistant par une quantité négative :

$$W = -\|\vec{P}\| \times h = -m\,g\,h$$

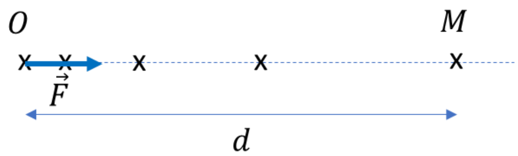
Voyons cela de façon un peu plus générale en supposant un vecteur-force résultant $\vec{F}$ constant agissant dans la direction de l'axe, le centre d'inertie de l'objet étant initialement immobile et au point O de cet axe. En désignant par $\vec{\imath}$ un vecteur unitaire de l'axe et en supposant un mouvement s'effectuant dans le sens de $\vec{\imath}$, on pose :

$$\overrightarrow{OM} = d\,\vec{\imath}, \qquad \vec{F} = F\,\vec{\imath}, \;\; \vec{v} = v\,\vec{\imath}, \qquad \vec{a} = a\,\vec{\imath}$$

Nous allons alors étudier deux situations, celle d'une force agissant dans le sens du mouvement (force motrice) et celle d'une force agissant dans le sens opposé (force résistante).

<u>Première situation : Force constante agissant dans le sens du mouvement</u>

Commençons par un mouvement accéléré partant de l'immobilité en O à l'instant $t = 0$ et pour lequel $F > 0$ auquel cas $v > 0$ et $a > 0$.



La deuxième loi de Newton se traduit alors par les relations

$$\begin{cases} F = m\,a \\ v = a\,t \\ d = \dfrac{1}{2}\,a\,t^2 \end{cases}$$

En éliminant le temps comme fait précédemment entre les deux dernières relations, on obtient :

$$d = \frac{1}{2}\, a\, \left(\frac{v}{a}\right)^2$$

$$a\, d = \frac{1}{2}\, v^2$$

$$m\, a\, d = \frac{1}{2} m\, v^2$$

Soit finalement :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{2} m\, v^2 = F\, d = \left\|\vec{F}\right\| \times d}}$$

Cette relation, déduite des équations horaires, fait apparaitre deux quantités, toutes deux évaluées en Joules de symbole J :

L'énergie cinétique de translation (*) :

$$\boxed{\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2} m\, v^2}}$$

(*) on dit de translation car il existe une énergie cinétique de rotation, par exemple, quand un corps est en rotation autour d'un axe, son centre d'inertie étant sur l'axe.

Le travail de la force (work en anglais), moteur ici, car la force agit dans le sens du mouvement

$$\boxed{\boldsymbol{W = \left\|\vec{F}\right\| \times d}}$$

La relation se traduit donc dans ce cas ainsi :

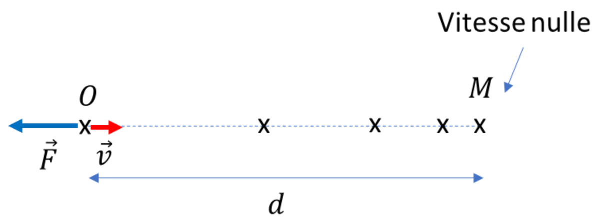
L'énergie cinétique (de translation) acquise par le corps à un instant donné est égale au travail de la force sur la distance parcourue.

A noter que la relation initiale se réécrit :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{2}\, m\, v^2 - \frac{1}{2}\, m\, 0^2 = W}}$$

<u>**Deuxième situation : Force constante agissant dans le sens opposé au mouvement**</u>

De façon symétrique comme dans le cas du lâcher et du lancer, on peut s'intéresser au mouvement inverse où, partant d'une position initiale en un point O avec un vecteur vitesse initial $\vec{v}$ on applique un vecteur force constant colinéaire et de sens opposé au mouvement, soit $F < 0$ jusqu'à immobilisation de l'objet en un point M.



Dans ce cas, la relation précédente reste valable :

$$\frac{1}{2}m\, v^2 = \|\vec{\boldsymbol{F}}\| \times \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{d}$$

La force exerçant un travail résistant, on définirait ce dernier par la quantité :

$$\boldsymbol{W} = -\|\vec{\boldsymbol{F}}\| \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{d}$$

La relation s'écrirait alors :

$$\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\, \boldsymbol{m}\, \mathbf{0}^{2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\, \boldsymbol{m}\, \boldsymbol{v}^{2} = \boldsymbol{W}}$$

On peut donc traduire les deux situations par un même énoncé :

La variation d'énergie cinétique (de translation) d'un corps accéléré depuis une position immobile ou bien freiné jusqu'à une position immobile par une force constante agissant dans la direction du mouvement est égale au travail de cette force sur le chemin suivi.

Cette relation est qualifiée de **théorème de l'énergie cinétique** et nous la généraliserons un peu plus loin.

<u>Exemple d'application de cette relation en sécurité routière</u> :

Si la vitesse d'un véhicule est multipliée par deux, son énergie cinétique est multipliée par 4, donc :

- pour une force de freinage donnée, la distance de freinage est multipliée par 4
- pour une distance de freinage donnée, la force de freinage est multipliée par 4

8. Cas d'une force perpendiculaire à la direction du mouvement

Considérons le mouvement d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre. Dans le référentiel géocentrique, le mouvement de ce satellite est circulaire uniforme et la seule force agissant sur lui est la force gravitationnelle exercée par la Terre. Cette force a une direction perpendiculaire à la tangente à la trajectoire. On observe qu'elle n'a aucun effet sur la vitesse du satellite, donc sur son énergie cinétique. On dit qu'elle ne travaille pas.

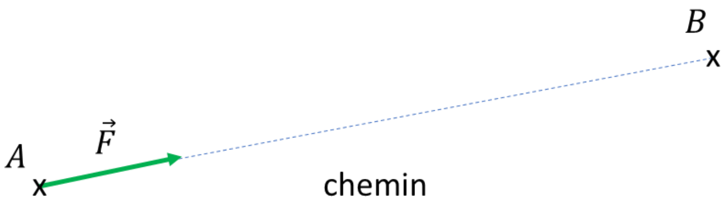
On retient :

Une force dont la direction est perpendiculaire à tout instant à la tangente à la trajectoire ne travaille pas. Elle est sans effet sur l'énergie cinétique du corps sur lequel elle s'applique.

9. Travail d'une force constante en direction, sens et intensité sur un chemin rectiligne

La force est alors décrite par un vecteur constant $\vec{F}$ et son intensité par la norme de ce vecteur notée $\|\vec{F}\|$. Nous nous intéressons alors au calcul de son travail entre un point A et un point B situé à un temps ultérieur. Examinons plusieurs cas :

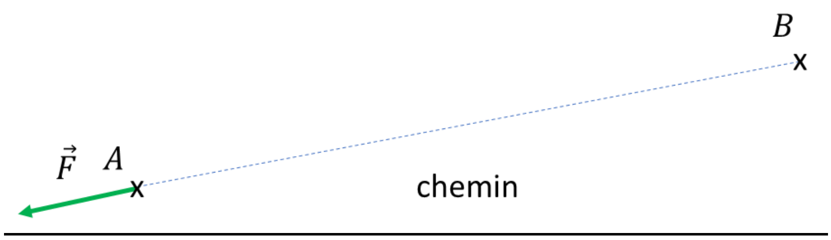
1er Cas : Force agissant dans la direction et le sens du mouvement :



$$\boldsymbol{W(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \times AB}$$

Le travail d'une telle force est qualifié de moteur car il contribue à augmenter l'énergie cinétique de translation.

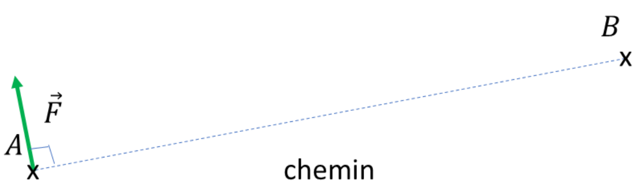
2ème cas : Force agissant dans la direction mais le sens opposé au mouvement :



$$\boldsymbol{W(\vec{F}) = -\|\vec{F}\| \times AB}$$

Le travail d'une telle force est qualifié de résistant car il contribue à diminuer l'énergie cinétique de translation.

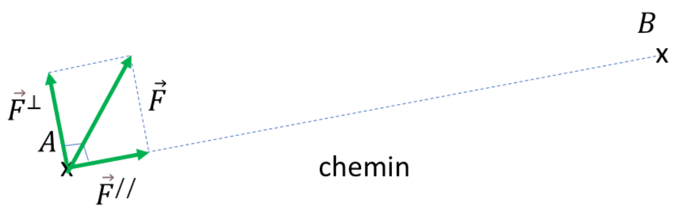
3ème cas : Force agissant perpendiculairement à la direction du mouvement :



$$\boldsymbol{W(\vec{F}) = 0}$$

Une telle force ne travaille pas. Elle ne peut contribuer à faire varier l'énergie cinétique de translation.

4^{ème} cas : Force agissant dans une direction oblique par rapport à celle du mouvement

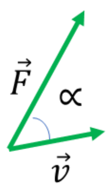


On décompose alors cette force en une composante $\vec{F}^{//}$qui est selon la direction du mouvement et une force $\vec{F}^{\perp}$ qui lui est perpendiculaire :

$$\vec{F} = \vec{F}^{//} + \vec{F}^{\perp}$$

Le travail de la force est alors le travail de sa composante $\vec{F}^{//}$. Il y a donc deux situations possibles.

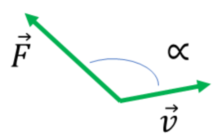
Première situation : l'angle α formé par le vecteur vitesse ou le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est de même sens et le vecteur force est aigu :



Le travail est alors moteur et vaut :

$$\boxed{\boldsymbol{W(\vec{F}) = \|\vec{F}^{//}\| \times AB = \|\vec{F}\| \cos(\alpha) \times AB}}$$

Deuxième situation : l'angle formé par le vecteur vitesse et le vecteur force est obtu :



Le travail est alors résistant et vaut :

$$\boxed{\boldsymbol{W(\vec{F}) = -\|\vec{F}^{//}\| \times AB = \|\vec{F}\| \cos(\alpha) \times AB}}$$

Ces deux situations se résument en une seule, en utilisant la notion de produit scalaire, développée juste après :

$$\boxed{\boldsymbol{W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\| \ \|\overrightarrow{AB}\| \cos(\alpha)}}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Désignons par α l'angle de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$. On peut alors définir le produit scalaire de ces deux vecteurs comme étant :

Si $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (vecteurs formant un angle aigu) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}^{//}\right\| \ \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \ \left\|\vec{v}^{//}\right\|$$

Si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ (vecteurs formant un angle obtu) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\left\|\vec{u}^{//}\right\| \ \|\vec{v}\| = -\|\vec{u}\| \ \left\|\vec{v}^{//}\right\|$$

où on a désigné par $\vec{u}^{//}$, le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ et par $\vec{v}^{//}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

Cette définition a bien un sens car :

Si $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $cos(\alpha) \geq 0$

$$\left\|\vec{u}^{//}\right\| = \|\vec{u}\| \ cos(\alpha)$$

$$\left\|\vec{v}^{//}\right\| = \|\vec{v}\| \ cos(\alpha)$$

Si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: $cos(\alpha) \leq 0$

$$\left\|\vec{u}^{//}\right\| = -\|\vec{u}\| \ cos(\alpha)$$

$$\left\|\vec{v}^{//}\right\| = -\|\vec{v}\| \ cos(\alpha)$$

Le produit scalaire peut donc se définir également ainsi :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \ cos(\alpha)$$

Ce qui est la forme la plus utile en physique.

En mathématiques, pour des calculs visant à établir des propriétés géométriques, on utilise plutôt la définition équivalente suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Dont on voit aisément par le théorème de Pythagore qu'il est nul si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

On vérifie alors aisément que l'on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$$

Si $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$, $\vec{v} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}$ dans une base orthogonale quelconque $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$

<u>Propriétés du produit scalaire</u> :

La commutativité :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

La distributivité de + par rapport à · : $\quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Une sorte d'associativité : $(k\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\,\vec{v}) = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$

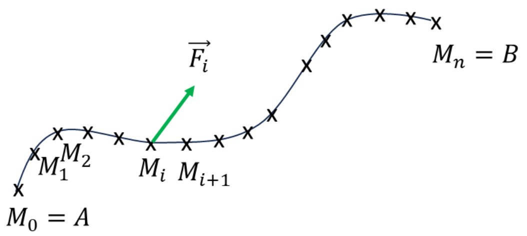
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

---

10. <u>Travail d'une force quelconque sur un chemin $\boldsymbol{\Gamma}$ quelconque entre deux points $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$</u>

Le calcul se fait en considérant le chemin comme étant une suite de n portions rectilignes formées de segments $[M_i; M_{i+1}]$ de longueur infiniment petites sur lesquelles le vecteur force est constant de valeur $\vec{F_i}$, M_0 étant le point A et M_n étant le point B.



Le travail de $\vec{F}$ est alors égal à la somme des travaux de chacune de ses valeurs sur chacun des segments, soit :

$$\boldsymbol{W_\Gamma}(\vec{F}) = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n-1}} \boldsymbol{W}_{[M_i;M_{i+1}]}(\vec{F_i})$$

où

$$\boldsymbol{W}_{[M_i;M_{i+1}]}(\vec{F_i}) = \vec{F_i} \cdot \overrightarrow{M_i M_{i+1}}$$

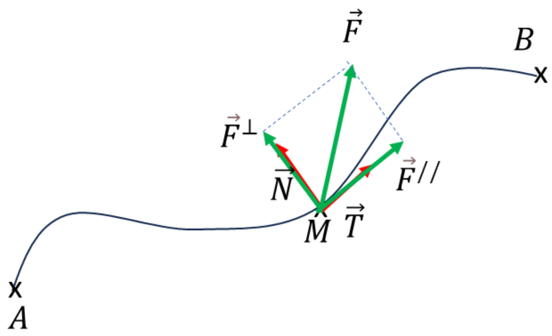
Ainsi :

$$\boldsymbol{W_\Gamma}(\vec{F}) = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n-1}} \vec{F_\iota} \cdot \overrightarrow{M_\iota M_{\iota+1}}$$

Pour être plus précis, il faut aussi considérer la valeur limite d'une telle expression quand la taille des segments se rapproche de 0. L'écriture rigoureuse fait alors appel au concept d'intégrale :

$$\boldsymbol{W_\Gamma}(\vec{\boldsymbol{F}}) = \int_{\boldsymbol{A\to B}} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{dl}}$$

Repérons un point M du chemin par une abscisse curviligne l qui est la distance parcourue sur le chemin entre le point A et le point M et considérons, en tout point du chemin, une base orthonormée $(\vec{T}, \vec{N})$ où est le vecteur unitaire tangent en M au chemin.



On peut alors décomposer le vecteur force en M et le vecteur $\overrightarrow{dl}$ sur cette base :

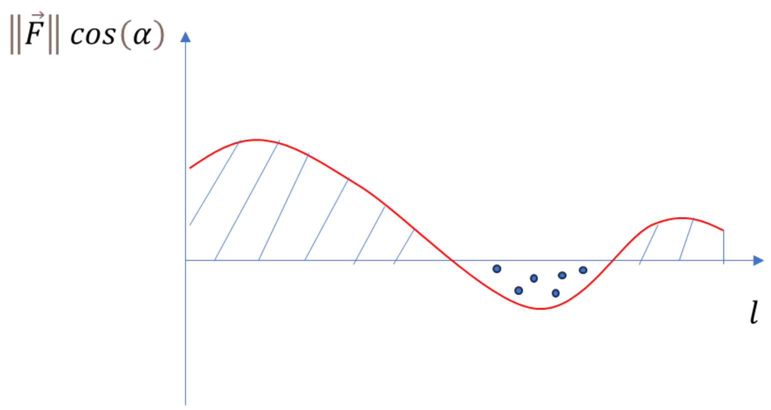
$$\overrightarrow{dl} = dl\,\vec{T} \qquad \vec{F} = \vec{F}^{//} + \vec{F}^{\perp} = \vec{F} = F^{//}\,\vec{T} + F^{\perp}\,\vec{N}$$

On a alors, en notant α l'angle d'espace $(\vec{T}, \vec{F})$:

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = F^{//}\,\vec{T} \cdot dl\,\vec{T} = F^{//}\,dl = \|\vec{F}\|\,cos(\alpha)\,dl$$

On peut alors donner un sens géométrique à l'intégrale précédente en traçant la courbe de $F^{//}$ en fonction de l entre 0 et L, L étant la longueur du chemin entre A et B.

L'intégrale est une somme algébrique d'aires de régions comprises entre la courbe et l'axe des abscisses, ces aires étant affectées du signe plus quand la courbe se situe au-dessus (régions hachurées) et du signe moins quand elle se situe en dessous (région avec des points)



11. <u>Théorème de l'énergie cinétique _ formule générale :</u>

Soit un corps soumis à un ensemble de forces $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}$. On appelle résultante de ces forces, leur somme vectorielle notée :

$$\sum \vec{F}^{ext} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}, + \cdots + \overrightarrow{F_n}$$

La deuxième loi de Newton s'exprime, comme nous l'avons vu, sous la forme :

$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = m\,\vec{a}}$$

$\vec{a}$ étant le vecteur accélération du centre d'inertie.

On peut alors déduire de cette relation le **théorème de l'énergie cinétique** dans sa formulation la plus générale.

Si le centre d'inertie d'un corps se déplace sur un chemin Γ d'un point A à un point B, alors la variation d'énergie cinétique de translation de ce corps est égale au travail sur ce chemin de la résultante des forces qui s'y appliquent, lequel est aussi égal à la somme des travaux sur ce chemin de toutes les forces appliquées au centre d'inertie. Soit en formule :

$$\frac{1}{2} m\, v_B{}^2 - \frac{1}{2} m\, v_A{}^2 = W_\Gamma\left(\sum \vec{F}^{ext}\right) = \sum W_\Gamma\left(\vec{F}^{ext}\right)$$

<u>Preuve de ce théorème</u> : On commence par décomposer la résultante dans une base orthonormée quelconque.

$$\sum \vec{F}^{ext} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} + F_z\,\vec{k}$$

On applique alors la deuxième loi de Newton :

$$\begin{cases} F_x = m\,a_x \\ F_y = m\,a_y \\ F_z = m\,a_z \end{cases}$$

On fait apparaitre les composantes du vecteur vitesse

$$\begin{cases} F_x = m\ \dfrac{dv_x}{dt} \\ F_y = m\ \dfrac{dv_y}{dt} \\ F_z = m\ \dfrac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

On multiplie par ces mêmes composantes :

$$\begin{cases} F_x\ v_x = m\ \dfrac{dv_x}{dt}\ v_x \\ F_y\ v_y = m\ \dfrac{dv_y}{dt}\ v_y \\ F_z\ v_z = m\ \dfrac{dv_z}{dt}\ v_z \end{cases}$$

On somme les trois équations :

$$F_x\ v_x + F_y\ v_y + F_z\ v_z = m\ \frac{dv_x}{dt}\ v_x + m\ \frac{dv_y}{dt}\ v_y + m\ \frac{dv_z}{dt}\ v_z$$

On reconnait des dérivées composées :

$$F_x\ v_x + F_y\ v_y + F_z\ v_z = \frac{1}{2}m\ \frac{d{v_x}^2}{dt} + \frac{1}{2}m\ \frac{d{v_y}^2}{dt} + \frac{1}{2}m\ \frac{d{v_z}^2}{dt}$$

$$F_x\ v_x + F_y\ v_y + F_z\ v_z = \frac{1}{2}m\ \frac{d\left({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2\right)}{dt}$$

$$F_x\ v_x + F_y\ v_y + F_z\ v_z = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\ v^2\right)}{dt}$$

$$F_x\ v_x\ dt + F_y\ v_y\ dt + F_z\ v_z\ dt = d\left(\frac{1}{2}m\ v^2\right)$$

$$F_x\ dx + F_y\ dy + F_z\ \ dz = d\left(\frac{1}{2}m\ v^2\right)$$

$$\vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = d\left(\frac{1}{2}m\ v^2\right)$$

On intègre sur le chemin :

$$\int_{\boldsymbol{\Gamma}} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{\boldsymbol{\Gamma}} d\left(\frac{1}{2}m\ v^2\right) = \frac{1}{2}m\ {v_B}^2 - \frac{1}{2}m\ {v_A}^2$$

12. Calcul de travail dans des cas simples :

Ce travail peut se calculer aisément dans quelques situations particulières :

Première situation : Le vecteur force est constant :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_\iota M_{\iota+1}} = \vec{F} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{M_\iota M_{\iota+1}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Et en passant à la limite :

$$\boxed{\boldsymbol{W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}}}$$

Un exemple très important de force constante est le poids localement.

Deuxième situation : **Le vecteur force est colinéaire au vecteur vitesse et d'intensité constante en étant soit toujours de même sens, ou de sens contraire.**

S'il est de même sens :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_\iota M_{\iota+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \|\vec{F}\| \times M_i M_{i+1} = \|\vec{F}\| \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1}$$

et en passant à la limite :

$$\boxed{\boldsymbol{W(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \times L}}$$

où L est la longueur du chemin suivi entre A et B.

S'il est de sens contraire :

$$\boxed{\boldsymbol{W(\vec{F}) = -\|\vec{F}\| \times L}}$$

Ce dernier cas peut se rencontrer avec des forces de frottement.

13. Force associée à une énergie potentielle

Lorsque le travail d'une force entre un point A et un point B ne dépend pas du chemin suivi, ce travail peut se s'exprimer de la façon suivante, en utilisant la relation de Chasles pour le calcul intégral et en choisissant un point O quelconque :

$$W(\vec{F}) = \int_{A\to B} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{A\to O} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_{O\to B} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Or :

$$\int_{O\to B} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{B\to O} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Donc :

$$W(\vec{F}) = \int_{A\to B} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{A\to O} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} - \int_{B\to O} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}$$

On définit alors une fonction qui à tout point de l'espace M, où cette force est susceptible d'opérer, associe son travail de M à O choisi arbitrairement comme référence (nous verrons comment le choisir dans les applications) :

$$\boldsymbol{E_{PF}(M) = \int_{M\to O} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = W_{M\to O}(\vec{F})}$$

Cette fonction est appelée **énergie potentielle** associée au travail de $\vec{F}$

On a alors :

$$\boldsymbol{W_{A\to B}(\vec{F}) = E_{PF}(A) - E_{PF}(B) = -\Delta E_{PF}}$$

Le travail d'une force associée à une énergie potentielle sur un chemin allant d'un point A à un point B est égal à l'opposé de la variation d'énergie potentielle entre ces points.

Notons qu'une énergie potentielle est définie à une constante arbitraire près

Intérêt de ce concept : La notion d'énergie mécanique

On peut l'illustrer dans deux situations :

Première situation :

Si $\vec{F}$ est la seule force qui travaille, alors le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c(B) - E_c(A) = E_{PF}(A) - E_{PF}(B)$$

Soit encore :

$$E_c(B) + E_{PF}(B) = E_c(A) + E_{PF}(A)$$

On définit alors l'énergie mécanique comme étant :

$$E_m(M) = E_c(M) + E_{PF}(M)$$

La relation traduit alors la conservation de l'énergie mécanique.

Deuxième situation :

Supposons qu'en plus de la force $\vec{F}$ associée à une énergie potentielle (c'est souvent le poids), une autre force $\vec{f}$ ne l'est pas (c'est souvent une force de frottement dont le travail est négatif.

Alors , le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$E_c(B) - E_c(A) = E_{PF}(A) - E_{PF}(B) + W_{A\to B}(\vec{f})$$

Soit encore :

$$\left(E_c(B) + E_{PF}(B)\right) - \left(E_c(A) + E_{PF}(A)\right) = W_{A\to B}\left(\vec{f}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{E_m(B) - E_{PF}(A) = W_{A\to B}\left(\vec{f}\right)}}$$

La variation d'énergie mécanique est donc égale au travail de la force $\vec{f}$. Si ce travail est négatif, il s'agit donc d'une perte d'énergie mécanique.

Nous aboutissons ainsi à deux propriétés essentielles en mécanique :

En définissant l'énergie mécanique d'un système comme étant la somme de son énergie cinétique et de toutes les énergies potentielles des forces qui leur sont associées (gravitationnelles, élastiques,…) nous avons :

La variation d'énergie mécanique du système est égale à la somme des travaux des forces qui ne sont pas associées à un potentiel.

Dans le cas où ces travaux sont nuls, le système est conservateur de son énergie mécanique.

14. <u>Formules d'énergie potentielle dans des cas particuliers</u>

<u>Vecteur force constant</u>

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{F}\cdot\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AO} + \vec{F}\cdot\overrightarrow{OB} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AO} - \vec{F}\cdot\overrightarrow{BO}$$

L'énergie potentielle associée est :

$$\boxed{\boldsymbol{E_{PF}(M) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{MO}}}$$

<u>Cas du poids terrestre localement :</u>

Dans un espace où il peut être considéré constant, le poids d'un corps entre dans cette catégorie. L'énergie potentielle associée est alors appelée énergie potentielle de pesanteur ou énergie de position. son expression est donc :

$$E_{PP}(M) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{MO}$$

Si on considère un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\vec{k}\right)$ où $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ se trouve dans un plan parallèle au plan local terrestre et $\vec{k}$ un vecteur dirigé vers l'espace, alors en posant :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}, \qquad \vec{P} = m\,\vec{g} = -m\,g\,\vec{k}$$

on a :

$$E_{PP}(M) = -m\, g\, \vec{k} \cdot \left(-x\, \vec{i} - y\, \vec{j} - z\, \vec{k}\right) = -m\, g\, \vec{k} \cdot \left(-z\, \vec{k}\right) = m\, g\, z$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{E_{PP}(M) = m\, g\, z}}$$

L'énergie potentielle associée au poids terrestre local ne dépend donc géométriquement que de l'altitude z. On rappelle que le poids peut être considéré comme constant jusqu'à une trentaine de kilomètres d'altitude, donc la formule précédente est valable dans un cylindre vertical dont la base est une portion de la Terre pouvant être considérée comme plate.

Cas du poids terrestre plus généralement :

On peut montrer de façon plus générale , que le poids terrestre d'un corps défini par la formule :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{P} = -\, G\, \frac{M_T\, m}{r^2}\, \vec{u}}}$$

où $\vec{u} = \frac{1}{OM}\, \overrightarrow{OM}$ est un vecteur unitaire, O le centre de la Terre, M_T sa masse, $r = OM$, m la masse du corps, est associé à une énergie potentielle que l'on peut définir par :

$$\boxed{\boldsymbol{E_{PP}(M) = -G\, \frac{M_T\, m}{r}}}$$

Remarque : on peut retrouver la formule précédente par approximation. En effet, si on note l'intensité de pesanteur à la surface de la Terre :

$$g = G\, \frac{M_T}{{R_T}^2}$$

alors on a $r = R_T + z$ et :

$$E_{PP}(M) = -G\, \frac{M_T\, m}{R_T + z} = -m\, G\, \frac{M_T}{R_T}\, \frac{1}{1 + \frac{z}{R_T}}$$

Or on rappelle que lorsque x est très petit devant 1, on a l'approximation :

$$\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x$$

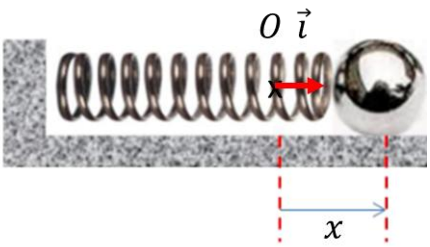
Ainsi lorsque l'altitude est très petite devant le rayon terrestre ($z \ll R_T$) :

$$E_{PP}(M) = -m\, G\, \frac{M_T}{R_T}\left(1 - \frac{z}{R_T}\right) = -m\, G\, \frac{M_T}{R_T} + m\, G\, \frac{M_T}{{R_T}^2}\, z = -m\, G\, \frac{M_T}{R_T} + m\, g\, z$$

Comme l'énergie potentielle est définie à une constante près, on peut éliminer le premier terme qui est constant (au sens où il ne dépend pas des coordonnées d'espace). On retrouve donc bien la relation précédente.

Force exercée par un ressort :

On considère un corps de masse m pouvant se déplacer librement sur un axe horizontal $(O, \vec{\imath})$. La position M du centre d'inertie de ce ressort est repérée par son abscisse x. Quand $x = 0$, le ressort est détendu.



Le ressort exerce une force de la forme :

$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{\imath}$$

les autres forces, poids du corps et réaction de support étant perpendiculaires et donc ne travaillant pas.

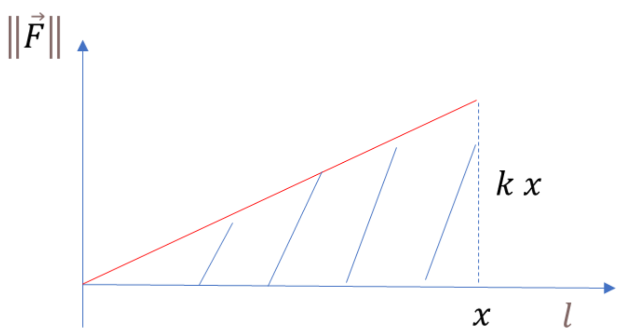
Calculons le travail de cette force lorsque la masse se déplace sur le segment allant d'un point M au point O en commençant par le cas $x \geq 0$ et en décrivant un point courant du chemin par une abscisse l :

$$\vec{F} = -k\,l\,\vec{\imath}, \quad \overrightarrow{dl} = dl\,\vec{\imath}, \quad \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = -k\,l\,dl$$

Ainsi :

$$W_{M\to O}(\vec{F}) = -W_{O\to M}(\vec{F}) = -\int_{l=0}^{l=x} -k\,l\,dl = \int_{l=0}^{l=x} k\,l\,dl$$

On note que cette force travaille toujours de façon positive. Son travail peut se calculer en représentant la fonction $k\,l = \|\vec{F}\|$ en fonction de l entre les abscisses 0 et x par une fonction linéaire et en calculant l'aire du triangle ainsi formé :



On a alors :

$$E_{PP}(M) = \frac{1}{2} k\,x\,x$$

$$\boldsymbol{E_{PP}(M) = \frac{1}{2} k\, x^2}$$

la formule restant valable pour $x < 0$.

<u>Exemple de force non associée à un potentiel</u> : la force de frottements

Considérons un objet que l'on déplace à vitesse constante entre deux points A et B en empruntant deux chemins : le segment joignant A à B et un demi-cercle de diamètre $[A, B]$.

Un modèle simple pour la force de frottement, lorsqu'il y glissement est :

$$\vec{f} = -K\,\vec{T}$$

où $\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et Kune constante dépendant du poids de l'objet et de la nature des surfaces en contact (sol et objet).

La travail de cette force est donc, en empruntant le segment :

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = -\|\vec{f}\|\,AB = -K\,AB$$

Et en empruntant le demi-cercle :

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = -K\,\frac{\pi\,AB}{2}$$

Ce travail n'a donc pas la même valeur dans les deux situations. Il dépend du chemin suivi donc il ne peut pas être calculé à partir de la variation d'une fonction énergie potentielle.

Il est à noter que ce travaille dégrade dans les deux cas l'énergie mécanique pour la transformer en chaleur. C'est pourquoi on qualifie les forces de frottements de forces dissipatives d'énergie.