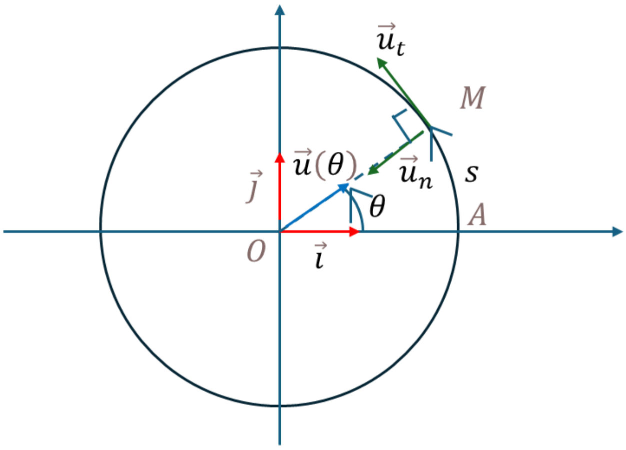
Analyse d'un mouvement en repère de Frénet – lois de Képler

Lorsque le centre de gravité d'une système est contraint de se déplacer sur une trajectoire dont l'équation cartésienne $y = f(x)$ est connue à l'avance, il est plus intéresser de décrire le mouvement dans le repère de Frénet, que nous allons mettre en évidence dans le cas d'un mouvement circulaire pour commencer

1) Mouvement circulaire en base de Frénet

On considère un mouvement circulaire s'effectuant dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on note r le rayon du cercle.

On oriente le cercle dans le sens trigonométrique et on caractérise la position d'un point mobile M du cercle à un instant t par une abscisse curviligne s fonction du temps mesurée comme une distance parcourue à partir d'un point A du cercle pris comme origine et reliée à une mesure θ de l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ par la relation : $s = r\,\theta$.



On introduit le vecteur unitaire, colinéaire et de même sens que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$$\boxed{\vec{u}(\theta) = cos(\theta)\,\vec{\imath} + sin(\theta)\,\vec{\jmath}}$$

Le vecteur $\vec{u}_t$ qui lui est directement orthogonal est le vecteur tangent au cercle au point M et s'obtient en changeant dans l'expression de $\vec{u}(\theta)$, $\vec{\imath}$ en $\vec{\jmath}$ et $\vec{\jmath}$ en $-\vec{\imath}$ ce qui est l'effet d'une rotation dans le sens trigonométrique de 90° sur les vecteurs de base. On obtient :

$$\boxed{\vec{u}_t = cos(\theta)\,\vec{\jmath} + sin(\theta)(-\vec{\imath}) = -\,sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath}}$$

Le vecteur qui est opposé à $\vec{u}(\theta)$ et qui pointe vers le centre du cercle est appelé vecteur normal au cercle au point M et s'écrit :

$$\boxed{\vec{u}_n = -cos(\theta)\,\vec{\imath} - sin(\theta)\,\vec{\jmath}}$$

Le couple de vecteur $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ forme une base du plan appelée **base de Frénet**

Le vecteur position s'écrit alors :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta) = r\,cos(\theta)\,\vec{\imath} + r\,sin(\theta)\,\vec{\jmath}}$$

Le vecteur vitesse instantané s'en déduit :

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} = -r\,\frac{d\theta}{dt} sin(\theta)\,\vec{\imath} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,cos(\theta)\,\vec{\jmath} = r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_t$$

On pose alors :

$$\boxed{\boldsymbol{v = r\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt}}}$$

Attention, v peut être positif ou négatif et n'est donc pas nécessairement la norme du vecteur vitesse. Plus précisément : $\|\vec{v}\| = |v|$. Ainsi le vecteur vitesse s'écrit facilement dans la base de Frénet sous la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{v} = v\,\vec{u}_t}}$$

Le vecteur accélération s'en déduit en dérivant cette relation :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_t + v\,\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

Or :

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d(-\,sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath})}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,cos(\theta)\,\vec{\imath} - \frac{d\theta}{dt}\,sin(\theta)\,\vec{\jmath} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_n$$

Ainsi :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_t + v\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_n$$

Or :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}$$

Finalement, on obtient les coordonnées du vecteur accélération dans la base de Frénet :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\,\vec{u}_n}}$$

Le premier terme $\frac{dv}{dt}\,\vec{u}_t$ est appelé **vecteur accélération tangentielle** noté $\vec{a}_t$ et le second $\frac{v^2}{r}\,\vec{u}_n$ noté $\vec{a}_n$ est appelé **vecteur accélération normale**.

2) Généralisation à un mouvement quelconque

Pour un point mobile $M(t)$ décrivant une courbe quelconque orientée dans un sens, on peut définir en une position donnée une base de Frénet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ qui varie à chaque instant (on parle de base mobile) et confondre le mouvement autour de ce point avec un mouvement circulaire sur un cercle de centre I et de rayon r, qui peuvent varier à chaque instant. On a alors la même relation que précédemment :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\,\vec{u}_n}}$$

r est appelé **rayon de courbure**. Il se calcule par différentes formules pour une courbe d'équation $y = f(x)$ (voir exercices sur la parabole)

3) Intérêt de la base de Frénet

Si le mouvement du centre de gravité d'un système matériel est plan et s'effectue dans un référentiel galiléen et si $\vec{F}$ désigne la résultante des forces agissant sur le système étudié pouvant dépendre a priori du temps, il est souvent utile de décomposer cette force dans le repère de Frénet :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F_t}\ \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{F_n}\ \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}}}$$

La deuxième loi de Newton s'écrit alors :

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$F_t\ \vec{u}_t + F_n\ \vec{u}_n = m\frac{dv}{dt}\ \vec{u}_t + m\frac{v^2}{r}\ \vec{u}_n$$

En identifiant les coordonnées, on obtient le système de relations :

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{F_t = m\dfrac{dv}{dt}} \\ \boldsymbol{F_n = m\dfrac{v^2}{r}} \end{cases}}$$

Il est à noter que la composante normale $F_n\ \vec{u}_n$ ne travaille pas car elle est orthogonale à tout instant au vecteur vitesse. Elle n'agit qu'en changeant la direction du vecteur vitesse mais pas sa norme. En revanche la composante tangentielle $F_t\ \vec{u}_t$ est responsable de l'augmentation ou la diminution de la norme du vecteur vitesse donc de l'énergie cinétique.

Un cas particulier important est celui pour lequel la composante tangentielle du vecteur force est nulle, c'est le cas des mouvements sans force motrice ou de freinage et sans frottements. Car dans ce cas la valeur de v, donc de l'énergie cinétique, reste constante et le système n'a qu'une accélération normale. C'est dans ce cadre qu'on peut par exemple étudier le mouvement de la Terre autour du Soleil, en l'approximant à un mouvement circulaire.

4) Un exemple d'application : Le mouvement de la Terre autour du Soleil

Notons m la masse de la Terre, vue comme un satellite du Soleil de masse M_s en orbite circulaire de rayon r égal à 150 000 000 km.

Le référentiel d'étude est le référentiel héliocentrique considéré comme galiléen.

Le système étudié est la Terre.

Il n'y a qu'une force qui agit, la force d'attraction gravitationnelle s'exprimant dans la base de Frénet sous la forme :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\boldsymbol{G\,m\,M_s}}{\boldsymbol{r^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}}}$$

Les coordonnées sont donc :

$$\begin{cases} F_t = 0 \\ F_n = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases}$$

La deuxième loi de Newton s'écrit donc dans cette base :

$$\begin{cases} 0 = m\dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{G\,m\,M_s}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases}$$

La première relation donne $\frac{dv}{dt} = 0$ donc la composante v est constante. Le mouvement est donc circulaire uniforme.

La seconde relation donne après simplification :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{G\ M_s}{r} = v^2}}$$

Or, si on introduit la période T de révolution de la Terre autour du Soleil qui est de 365,25 jours, on a :

$$v = \frac{2\,\pi\,r}{T}$$

Soit en reportant dans la relation précédente :

$$\frac{G\ M_s}{r} = \frac{4\,\pi^2\,r^2}{T^2}$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\,M_s}}}$$

Ceci se définit, dans le cas particulier d'une orbite circulaire, comme étant la **troisième loi de Képler.**

On peut ainsi par exemple en déduire la masse du soleil :

$$M_s = \frac{4\,\pi^2 r^3}{G\,T^2}$$

Sachant :

$$T = 365{,}25 \times 24 \times 3600\ s, \quad G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ (S.I.), \quad r = 1{,}5 \times 10^{11}\ m$$

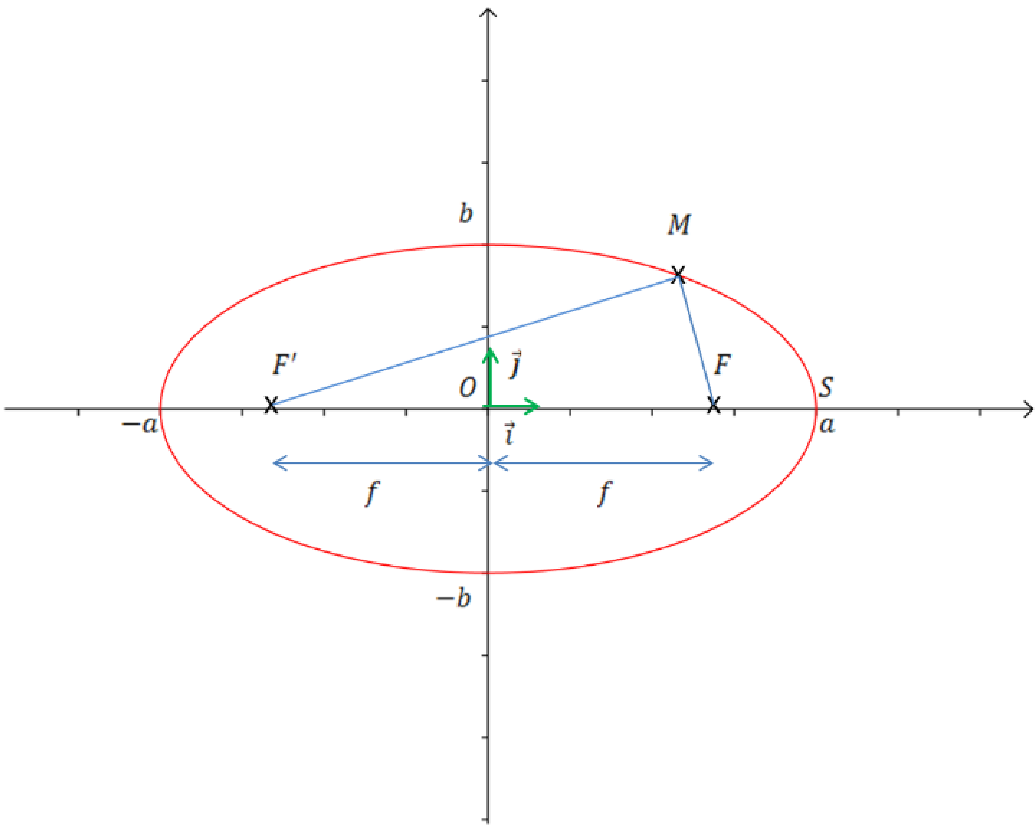
On trouve :

$$M_s = 2{,}0 \times 10^{30}\ kg$$

5) **Lois de Képler**

Première loi de Képler :

la trajectoire d'une planète autour d'un astre attracteur ou d'un satellite autour de d'une planète est une ellipse. Le centre de gravité de l'attracteur est situé à l'un des foyers $\boldsymbol{F}$ de l'ellipse.



Une ellipse est une courbe facile à tracer, c'est un secret de jardinier. Planter un poteau en un point F et un en un point F' et prendre une corde de longueur L plus grande que la distance FF'.

Tendre la corde avec un troisième bâton et se déplacer tout autour des foyers pour dessiner une ellipse.

L'ellipse est l'ensemble des points M vérifiant :

$$\boxed{\boldsymbol{MF + MF' = L}}$$

Dans le repère othornormé de la figure, elle a pour équation :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2} + \frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2} = \mathbf{1}}$$

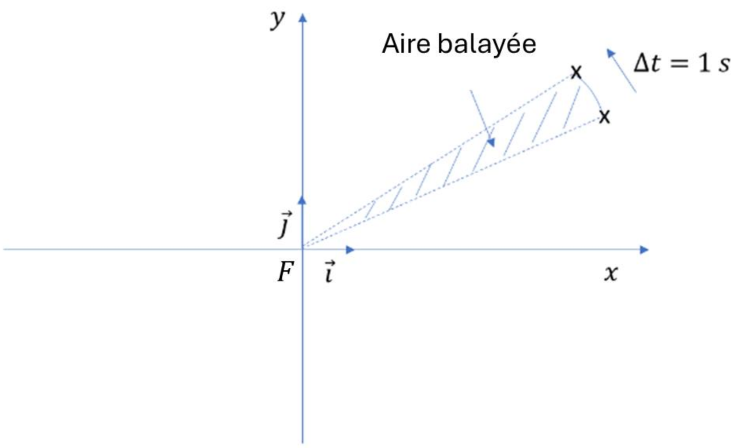
Où $a > b$ est appelé **demi-grand axe** et b **demi petit axe**.

Dans le cas particulier où $a = b$, l'ellipse est un cercle.

<u>Deuxième loi de Képler</u> : Loi des aires

Partant du foyer F où se situe l'attracteur (astre ou planète), on s'intéresse à l'aire d'un secteur balayé pendant une durée donnée Δt (par exemple 1 s) par le rayon FM, M étant la position du centre de gravité de la planète (ou du satellite) en orbite elliptique autour de l'attracteur, on a la loi suivante :

Des aires égales sont balayées pendant des durées égales.



<u>Troisième loi de Képler</u>

Le rapport du carré de la période de révolution d'une planète orbitant autour d'un astre (ou d'un satellite orbitant autour d'une planète) sur le cube de son demi grand axe est égal à une constante ne dépendant que de la masse M_s de l'astre.

Soit mathématiquement :

$$\frac{T^2}{a^3} = constante = \frac{4\,\pi^2}{G\,M_s}$$