Incertitudes de mesure

1) Problème général et définition de l'incertitude de mesure pour une grandeur physique mesurée expérimentalement

Lorsqu'on effectue une mesure, d'une grandeur physique f, on commet une erreur par rapport à la véritable valeur $\bar{f}$ que l'on peut supposer être la moyenne d'un très grand nombre de mesures que l'on effectuerait $f_1, f_2, \dots, f_N$, soit :

$$\boldsymbol{\bar{f} = \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_N}{N}}$$

L'incertitude type notée $u(f)$ est alors l'écart-type associé à cet ensemble de mesures

$$\boldsymbol{u(f) = \sqrt{V(f)}}$$

Où $V(f)$ est la variance de l'ensemble des mesures, soit :

$$\boldsymbol{V(f) = \frac{(f_1 - \bar{f})^2 + (f_2 - \bar{f})^2 + \cdots + (f_N - \bar{f})^2}{N}}$$

Cette incertitude est évaluée de cette façon pour un certain nombre de grandeurs élémentaires, comme par exemple la mesure d'un volume dans une burette graduée en chimie, la mesure d'un temps sur un chronomètre, etc…

A partir de ces grandeurs élémentaires, on peut alors calculer une nouvelle grandeur par une formule faisant intervenir des grandeurs mesurées avec des sommes, des produits ou des quotients, voyons cela.

Dans la suite, nous supposerons les grandeurs indépendantes dans leur ensemble.

2. Incertitude type d'une grandeur calculée

a) incertitude type d'une somme de deux grandeurs

Supposons que f soit une grandeur égale à la somme de deux grandeurs x et y d'incertitudes types connues, soit :

$$\boldsymbol{f = x + y}$$

Alors, puisque x et y sont indépendantes, on peut appliquer la propriété sur la variance d'une somme qui est la somme des variances, ainsi :

$$V(f) = V(x) + V(y) = u(x)^2 + u(y)^2$$

On en déduit l'incertitude type de f :

$$\boldsymbol{u(f) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}}$$

b) **incertitude type d'un produit de deux grandeurs**

Supposons que f soit une grandeur égale au produit de deux grandeurs x et y d'incertitudes types connues, soit :

$$\boxed{\boldsymbol{f = x\,y}}$$

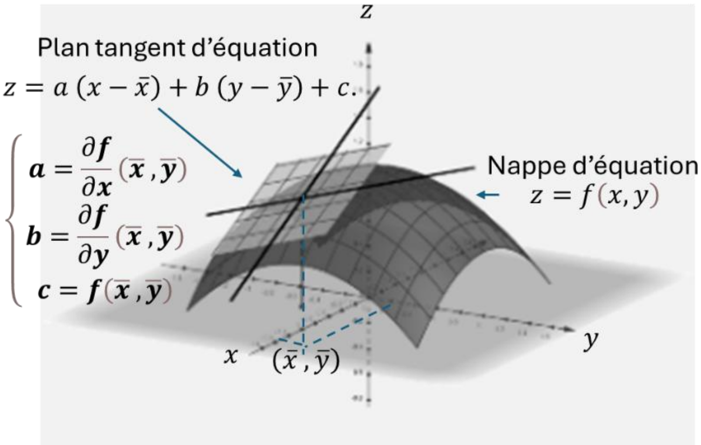
Alors, puisque x et y sont indépendantes, on peut appliquer la propriété sur la moyenne d'un produit qui est le produit des moyennes, ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{f} = \bar{x}\,\bar{y}}}$$

Toutefois, nous n'avons pas de formule simple pour la variance du produit. Il nous faut donc avoir recours à une approximation reposant sur le fait que toutes les mesures faites sur une grandeur sont très proche de la vraie valeur.

On considère alors la fonction de deux variables : $f(x, y) = x\,y$

Si on la représente graphiquement par une nappe d'équation $z = x\,y$ dans un repère orthonormé (O, x, y, z) alors cette nappe peut être approximé au voisinage de $(\bar{x}\,, \bar{y})$ par son plan tangent, lequel a une équation de la forme $z = a\,(x - \bar{x}) + b\,(y - \bar{y}) + c$.



Il est alors facile de déterminer a, b et c. En effet localement, on doit avoir :

$$f(\bar{x}\,, \bar{y}) = a\,(\bar{x} - \bar{x}) + b\,(\bar{y} - \bar{y}) + c$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{c = \bar{x}\,\bar{y} = \bar{f}}}$$

Les fonctions d'une variable $f(x\,, \bar{y}) = x\,\bar{y}$ et $g(x\,, \bar{y}) = a\,(x - \bar{x}) + b\,(\bar{y} - \bar{y}) + c = a\,(x - \bar{x}) + c$ doivent être tangentes en $x = \bar{x}$ donc doivent avoir même dérivée, qui est sur la figure ci-dessus le coefficient directeur de la droite parallèle au plan (x, O, z), ce qui donne :

$$\boxed{\boldsymbol{a = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}\,, \bar{y})}}$$

Les fonctions d'une variable $f(\bar{x}\,, y) = \bar{x}\;\;y$ et $g(\bar{x}\,, y) = a\,(\bar{x}\;-\bar{x}) + b\,(y - \bar{y}) + c = b\,(y - \bar{y}) + c$ doivent être tangentes en $y = \bar{y}$ donc doivent avoir même dérivée, qui est sur la figure ci-dessus le coefficient directeur de la droite parallèle au plan (y, O, z) ce qui donne :

$$\boxed{\boldsymbol{b = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}\,,\bar{y}) = \bar{x}}}$$

Ainsi, on peut approximer les valeurs f par :

$$\boxed{\boldsymbol{f = \bar{y}\,(x - \bar{x}) + \bar{x}\,(y - \bar{y}) + \bar{x}\,\bar{y}}}$$

En prenant la variance, et en notant que les deux premiers termes sont des séries statistiques indépendantes , on obtient :

$$V(f) = V(\bar{y}\,(x - \bar{x}) + \bar{x}\,(y - \bar{y}) + \bar{x}\,\bar{y})$$

$$V(f) = V\big(\bar{y}\,(x - \bar{x})\big) + V\big(\bar{x}\,(y - \bar{y})\big)$$

$$V(f) = \bar{y}^2\,V(x) + \bar{x}^2\,V(y)$$

Soit, en faisant apparaitre les incertitude types :

$$u(f)^2 = \bar{y}^2\,u(x)^2 + \ \bar{x}^2\,u(y)^2$$

Et en divisant par $\bar{f}^2 = \bar{x}^2\,\bar{y}^2$:

$$\frac{u(f)^2}{\bar{f}^2} = \frac{\bar{y}^2\,u(x)^2}{\bar{x}^2\,\bar{y}^2} + \frac{\bar{x}^2\,u(y)^2}{\bar{x}^2\,\bar{y}^2}$$

Et en simplifiant :

$$\frac{u(f)^2}{\bar{f}^2} = \frac{u(x)^2}{\bar{x}^2} + \frac{u(y)^2}{\bar{y}^2}$$

Puis en prenant la racine carrée :

$$\frac{u(f)}{\bar{f}} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{\bar{y}}\right)^2}$$

Mais comme valeur mesurée et valeur réelle inconnue sont censée être proches, on remplacera dans cette formule les valeurs réelles inconnues par les valeurs mesurées. On obtient ainsi la formule de **l'incertitude relative d'un produit** :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{u(f)}{f} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}}}$$

<u>Exemple en chimie</u> :

On mesure un volume Vdans une éprouvette gradué de 50,0 mL avec une incertitude type de 0,1 mL et on y verse une solution de concentration $c = 0{,}100\ mol\ L^{-1}$ avec une incertitude de 0,001 $mol\ L^{-1}$. Le nombre de moles dans la solution est alors $n = c\ V = 5\ \times 10^{-3}\ mol$

L'incertitude sur le nombre de moles n est alors :

$$u(n) = n\sqrt{\left(\frac{u(c)}{c}\right)^2 + \left(\frac{u(V)}{V}\right)^2} = 5\ \times 10^{-3} \times \sqrt{\left(\frac{0{,}001}{0{,}1}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{50{,}0}\right)^2}$$

$$u(n) = 5 \times 10^{-4}\ mol$$

c) **Incertitude type d'un produit de puissances :**

On reprend la démarche précédente avec une relation du type :

$$\boldsymbol{f = x^p\, y^q}$$

où p et q sont deux réels non nuls quelconques :

Nous avons encore par indépendance :

$$\boldsymbol{\bar{f} = \bar{x}^p\, \bar{y}^q}$$

Et en posant $f(x, y) = x^p\, y^q$ on a :

$$\boldsymbol{a = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}\,, \bar{y}) = p\, \bar{x}^{p-1} \bar{y}^q}$$

$$\boldsymbol{b = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}\,, \bar{y}) = q\, \bar{x}^p\, \bar{y}^{q-1}}$$

Ainsi, on peut approximer les valeurs f par :

$$\boldsymbol{f = p\, \bar{x}^{p-1} \bar{y}^q\, (x - \bar{x}) + q\, \bar{x}^p\, \bar{y}^{q-1}\, (y - \bar{y}) + \bar{x}^p\, \bar{y}^q}$$

Et en prenant la variance :

$$V(f) = (p\, \bar{x}^{p-1} \bar{y}^q)^2\, V(x) + (q\, \bar{x}^p \bar{y}^{q-1})^2\, V(y)$$

Soit, en faisant apparaitre les incertitude types :

$$u(f)^2 = (p\, \bar{x}^{p-1} \bar{y}^q)^2\, u(x)^2 + \ (q\, \bar{x}^p \bar{y}^{q-1})^2\, u(y)^2$$

Et en divisant par $\bar{f}^2 = \bar{x}^{2\,p}\, \bar{y}^{2\,q}$:

$$\frac{u(f)^2}{\bar{f}^2} = \frac{(p\, \bar{x}^{p-1} \bar{y}^q)^2\, u(x)^2}{\bar{x}^{2\,p}\, \bar{y}^{2\,q}} + \frac{(q\, \bar{x}^p \bar{y}^{q-1})^2\, u(y)^2}{\bar{x}^{2\,p}\, \bar{y}^{2\,q}}$$

Et en simplifiant :

$$\frac{u(f)^2}{\bar{f}^2} = \frac{p^2\, u(x)^2}{\bar{x}^2} + \frac{q^2\, u(y)^2}{\bar{y}^2}$$

Puis en prenant la racine carrée :

$$\boldsymbol{\frac{u(f)}{\bar{f}} = \sqrt{p^2 \left(\frac{u(x)}{\bar{x}}\right)^2 + q^2 \left(\frac{u(y)}{\bar{y}}\right)^2}}$$

On remplace alors dans cette formule les valeurs vraies par les valeurs mesurées. Cette formule se généralise aisément à un nombre quelconque de facteurs :

Exemple : Supposons :

$$f = \frac{x^2\, y^3}{z} = x^2\, y^3\, z^{-1}$$

Alors :

$$\frac{u(f)}{f} = \sqrt{4\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + 9\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 + \left(\frac{u(z)}{z}\right)^2}$$

3.) Intervalle de confiance à 95 %

Si on admet qu'une grandeur f est distribuée approximativement selon une loi normale (ou loi gaussienne) alors la probabilité d'obtenir une mesure se trouvant à moins de deux incertitudes types de la vraie valeur est égale à 0,95. Autrement dit, dans 95 % des cas, la mesure réelle $\bar{f}$ se trouve à moins de 1,96 écart-types de la mesure effectuée f :

$$\bar{f} \in [f - 1{,}96\ u(f), f + 1{,}96\, u(f)]$$

En pratique, on se trouve confronté à des problèmes du type : valider une valeur $\bar{f}$ qu'on suppose être pour une grandeur, par exemple en chimie une concentration de 0,10 $mol\ L^{-1}$ qu'on veut valider par titrage.

On effectue alors une mesure f de cette grandeur et on applique la règle de décision suivante :

Si $\bar{f}$ se trouve dans l'intervalle de confiance $[f - 1{,}96\, u(f), f + 1{,}96\, u(f)]$, on valide la valeur $\bar{f}$ pour cette grandeur testée, sinon on recommence l'expérience de test un certain nombre de fois, car on a pu commettre une erreur de manipulation. Si aucune expérience ne valide la valeur $\bar{f}$ alors on rejette l'hypothèse selon laquelle la grandeur a cette valeur, par exemple, la solution n'a pas la concentration de 0,10 $mol\ L^{-1}$ indiquée sur l'étiquette du flacon.

Pour être plus pratique encore, on calcule le quotient suivant :

$$z = \frac{|f - \bar{f}|}{u(f)}$$

$\bar{f}$ étant généralement une valeur de référence que l'on s'attend à mesurer

Si $z < 2$ la mesure f est dite conforme à la mesure de référence, sinon elle n'est pas conforme et il faut tenter d'expliquer pourquoi, erreur de manipulation expérimentale, corruption de la grandeur sensée être mesurée,...