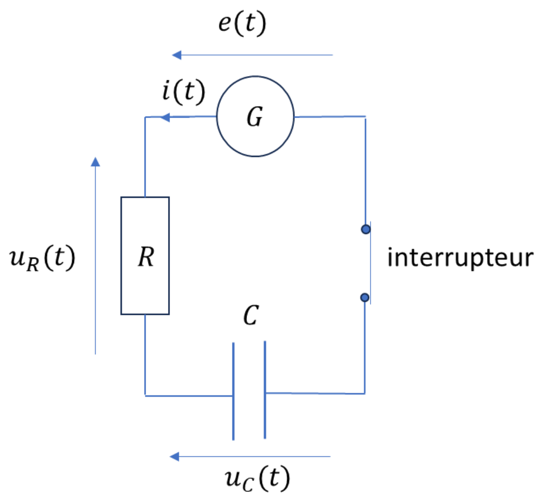
Le principe de l’usage des grandeurs complexes en régime sinusoïdal forcé

Nous allons illustrer ce principe sur l’exemple d’un circuit R, C alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale de la forme : $e(t) = E_{max}\, cos(\omega\, t + \varphi_e)$



Les différentes grandeurs de tensions et d’intensité de ce circuits vérifient le système d’équations suivant :

$$\begin{cases} u_R(t) + u_C(t) = e(t) \quad (loi\ de\ maille) \\ i(t) = C\, \dfrac{du_C(t)}{dt} \quad (loi\ tension\ intensité\ du\ condensateur) \\ u_R(t) = R\, i(t) \quad (Loi\ d'Ohm\ du\ résistor) \end{cases}$$

La solution de ce de système est alors la superposition de :

- la solution du système obtenu en faisant $e(t) = 0$, lequel correspond aux oscillations libres du circuit R, C et conduit à des solutions pour les tensions et l’intensité qui tendent vers 0
- une solution particulière du système dans lequel $e(t) = E_{max}\, cos(\omega\, t + \varphi_e)$ qui est telle que les grandeurs de tension et d’intensité sont de même forme, c’est-à-dire :

$$\begin{cases} u_R(t) = U_{Rmax}\, cos(\omega\, t + \varphi_R) \\ u_C(t) = U_{Cmax}\, cos(\omega\, t + \varphi_C) \\ i(t) = I_{max}\, cos(\omega\, t + \varphi_I) \end{cases}$$

On cherche donc les différentes grandeurs d’amplitude et de phase en résolvant le système :

$$\begin{cases} U_{Rmax}\, cos(\omega\, t + \varphi_R) + U_{Cmax}\, cos(\omega\, t + \varphi_C) = E_{max}\, cos(\omega\, t + \varphi_e) \\ I_{max}\, cos(\omega\, t + \varphi_I) = C\, \dfrac{d\big(U_{Cmax}\, cos(\omega\, t + \varphi_C)\big)}{dt} \\ U_{Rmax}\, cos(\omega\, t + \varphi_R) = R\, I_{max}\, cos(\omega\, t + \varphi_I) \end{cases}$$

Afin de simplifier cette recherche, plutôt que de développer les cosinus, on dérive les équations de ce système et on les divise par $-\omega$ ce qui aboutit à un système analogue où les cosinus sont remplacés par des sinus :

$$\begin{cases} U_{Rmax}\, sin(\omega\, t+\varphi_R)+U_{Cmax}\, sin(\omega\, t+\varphi_C)=E_{max}\, sin(\omega\, t+\varphi_e) \\ I_{max}\, sin(\omega\, t+\varphi_I)=C\, \dfrac{d\big(U_{Cmax}\, sin(\omega\, t+\varphi_C)\big)}{dt} \\ U_{Rmax}\, sin(\omega\, t+\varphi_R)=R\, I_{max}\, sin(\omega\, t+\varphi_I) \end{cases}$$

On combine alors le premier système avec le second multiplié par le nombre complexe j tel que $j^2 = -1$. Cela aboutit au système complexe :

$$\begin{cases} U_{Rmax}\, exp\big(j\,(\omega\, t+\varphi_R)\big)+U_{Cmax}\, exp\big(j(\omega\, t+\varphi_C)\big)=E_{max}\, exp\big(j(\omega\, t+\varphi_e)\big) \\ I_{max}\, exp\big(j(\omega\, t+\varphi_I)\big)=C\, \dfrac{d\Big(U_{Cmax}\, exp\big(j(\omega\, t+\varphi_C)\big)\Big)}{dt}=j\, C\, \omega\, U_{Cmax}\, exp\big(j(\omega\, t+\varphi_C)\big) \\ U_{Rmax}\, exp\big(j(\omega\, t+\varphi_R)\big)=R\, I_{max}\, exp\big(j(\omega\, t+\varphi_I)\big) \end{cases}$$

Finalement, en divisant chaque équation par $exp(j\ \omega\ t)$ on aboutit au système suivant

$$\boxed{\begin{cases} U_{Rmax}\, exp(j\ \ \varphi_R)+U_{Cmax}\, exp(j\, \varphi_C)=E_{max}\, exp(j\, \varphi_e) \\ I_{max}\, exp(j\, \varphi_I)=j\, C\, \omega\, U_{Cmax}\, exp(j\, \varphi_C) \\ U_{Rmax}\, exp(j\, \varphi_R)=R\, I_{max}\, exp(j\, \varphi_I) \end{cases}}$$

Ce système fait apparaitre des grandeurs complexes de tensions et d'intensité , chaque grandeur se présentant sous la forme : $Amplitude\ exp(j\ \ phase)$ ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{U_R}=U_{Rmax}\, exp(j\ \ \varphi_R) \\ \underline{U_C}=U_{Cmax}\, exp(j\ \ \varphi_C) \\ \underline{E}=E_{max}\, exp(j\ \ \varphi_e) \\ \underline{I}=I_{max}\, exp(j\ \ \varphi_I) \end{cases}}$$

A noter que le module de la grandeur complexe est l'amplitude de la grandeur réelle associée et qu'un argument en est la phase.

Le système aux grandeurs complexes se réécrit donc :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{U_R}+\underline{U_C}=\underline{E} \\ \underline{I}=j\, C\, \omega\, \underline{U_C} \\ \underline{U_R}=R\, \underline{I} \end{cases}}$$

A ce système on peut alors associer un schéma complexe dans lequel les différents éléments comme les résistors et condensateurs sont représentés par des dipôles caractérisés par une **impédance complexe**, quotient de la grandeur complexe de tension sur la grandeur complexe d'intensité. Ainsi :

- pour un résistor , l'impédance complexe est :

$$\boxed{\underline{Z_R}=\frac{\underline{U_R}}{\underline{I}}=R}$$

- pour un condensateur :

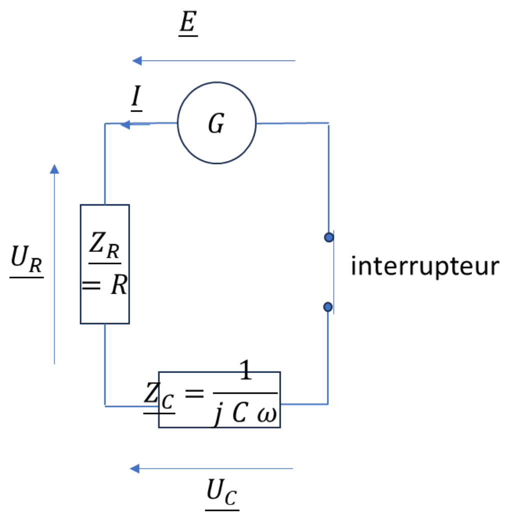
$$\boxed{\underline{Z_C} = \frac{\underline{U_C}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\,C\,\omega}}$$

- pour une bobine d'inductance L on démontre facilement à partir de la relation tension intensité : $u_L(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$ que l'on a $\underline{U_L} = j\,L\,\omega\,\underline{I}$ donc :

$$\boxed{\underline{Z_L} = \frac{\underline{U_L}}{\underline{I}} = j\,L\,\omega}$$

(il suffit de noter que toute dérivation dans la relation aux grandeurs réelles est remplacée par un produit par $j\ \ \omega$ dans les relation aux grandeurs complexes)

Le schéma complexe est alors le suivant :



Un circuit électrique formé de résistors, condensateurs et bobines se traitera donc de façon analogue via le circuit complexe associé comme un circuit continu formé de résistors alimentés par un ou plusieurs générateurs de tension ou de courant continus. Toutes les propriétés, loi du diviseur de courant, loi du diviseur de tension, théorème de Thévenin ou de Norton, Calcul de résistance équivalente se transposeront alors facilement en remplaçant pour chaque dipôle résistance par impédance complexe.