

EFFET PIEZOELECTRIQUE

I Histoire de la découverte

Etymologie : piezo = « (du grec) serrer, presser »

Découverte : La première démonstration de l'effet piézoélectrique direct est due à Pierre et Jacques Curie en 1880 qui prédisent et vérifient l'existence de la piézoélectricité sur des cristaux de quartz notamment.

Phénomène physique :

- Lorsqu'on applique une action mécanique à certains matériaux (traction, compression, flexion, cisaillement, torsion, il apparait des charges à sa surface, générant une tension entre deux faces opposées.
- Lorsqu'on applique inversement une tension entre deux faces opposées de ces matériaux, ils se déforment mécaniquement.

II Interprétation du phénomène

Nous allons voir comment une action mécanique de traction, compression peut induire une polarisation au sein d'un quartz.

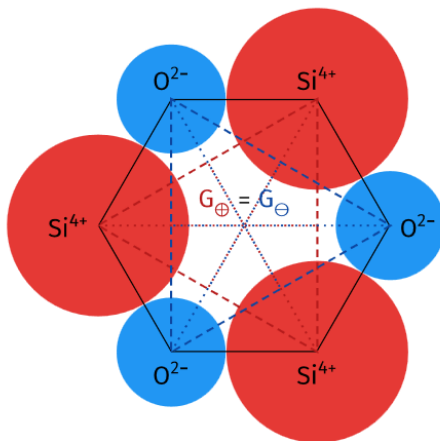


Figure 1. Schéma d'une maille au repos

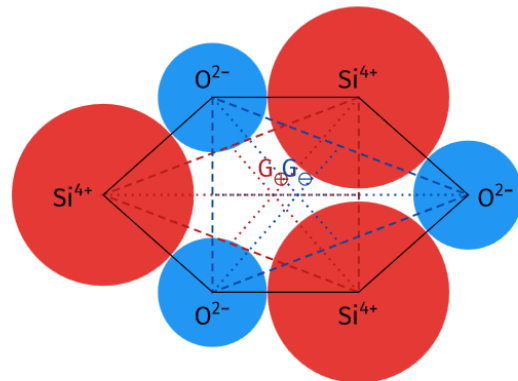


Figure 2. Schéma d'une maille déformée

Dans la maille au repos, les barycentres des charges positives et négatives $G_{\oplus}$ et $G_{\ominus}$ sont confondus. En appliquant une déformation, ils ne le sont plus. La maille définit alors un dipôle de moment dipolaire : $\vec{p} = \delta \overrightarrow{G_{\ominus} G_{\oplus}}$, δ étant la charge positive attribuée à la maille.

Les dipôles ainsi créés ont même moment dipolaire.

Inversons la maille de la figure 2 de façon à obtenir un vecteur moment dipolaire de sens vers la droite et considérons une suite de mailles cubiques joignant deux faces opposées. Nous voyons alors que la maille la plus à gauche verra apparaître sur sa face gauche une charge négative et la plus à droite sur sa face droite, une charge positive. C'est ce phénomène qui est à l'origine de la tension observée sous l'effet d'une traction dans notre exemple. Inversement, si nous appliquons une tension positive entre la face droite de la maille de droite et la face gauche de la maille de gauche, nous verrons apparaître une elongation horizontale.

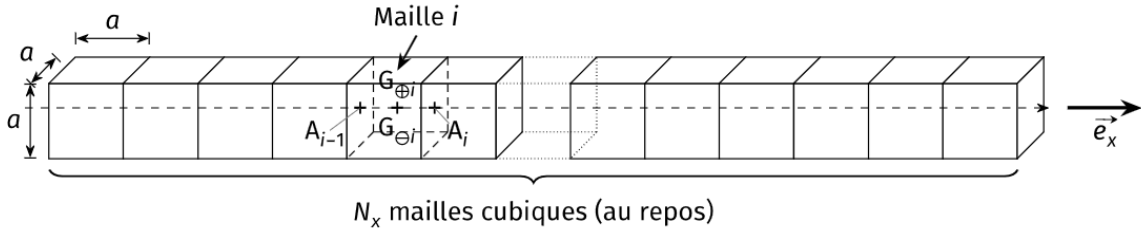


Figure 3 : ligne de mailles cubiques au repos

III Modélisation de l'interaction entre deux ions de charges opposées

La figure suivante montre l'évolution de l'énergie potentielle d'interaction entre deux ions de charges opposées séparés d'une distance ℓ .

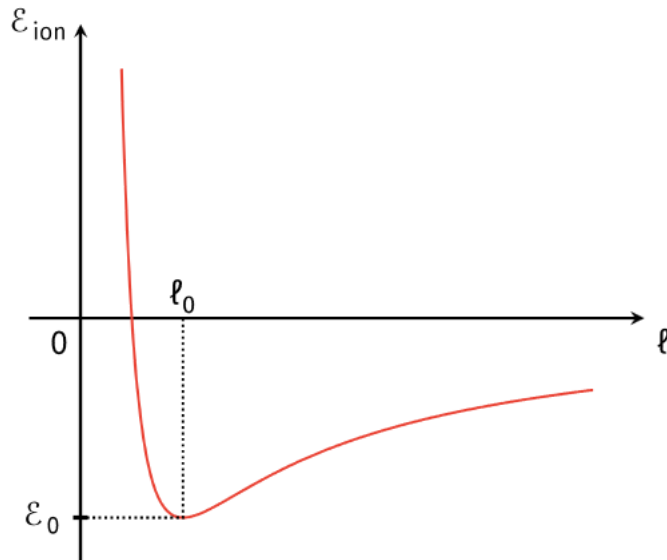


Figure 4. Energie potentielle $\mathcal{E}_{ion}$ d'interaction entre deux ions

Développons cette énergie au voisinage de son minimum au second ordre :

$$\mathcal{E}_{ion}(\ell) = \mathcal{E}_{ion}(\ell_0) + (\ell - \ell_0) \frac{d\mathcal{E}_{ion}}{d\ell}(\ell_0) + \frac{1}{2}(\ell - \ell_0)^2 \frac{d^2\mathcal{E}_{ion}}{d\ell^2}(\ell_0)$$

Or au minimum, la dérivée s'annule, donc :

$$\mathcal{E}_{ion}(\ell) = \mathcal{E}_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{E}_{ion}}{d\ell^2}(\ell_0) (\ell - \ell_0)^2$$

Posons :

$$k = \frac{d^2\mathcal{E}_{ion}}{d\ell^2}(\ell_0)$$

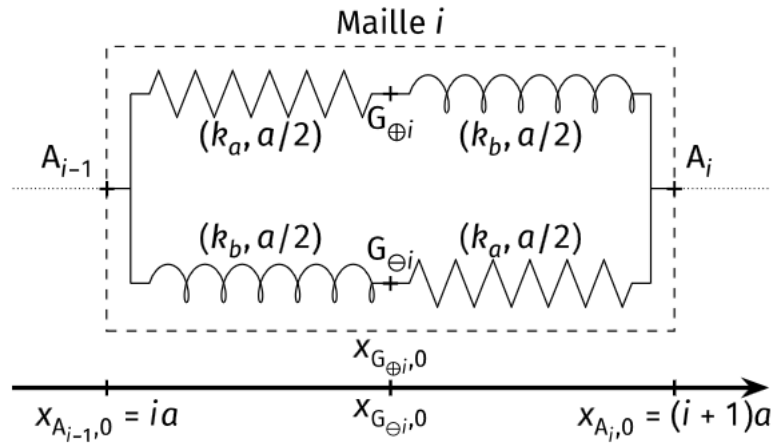
Une énergie potentielle étant définie à une constante arbitraire près, nous pouvons prendre pour formule d'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_{ion}(\ell) = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$$

On reconnaît là l'énergie potentielle associée à une force d'interaction de type ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k .

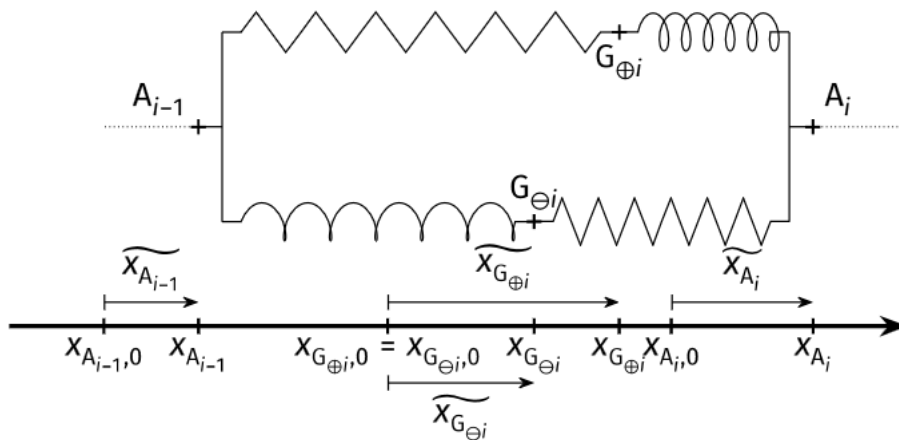
IV Modélisation des interactions entre ions de mailles voisines

Compte tenu des remarques faites au paragraphe II, on propose de modéliser les interactions entre mailles voisines de la façon présentée sur la figure suivante :



Les mailles étant au repos, les barycentres des charges positives et négatives confondus même si représentés sur le schéma comme deux points décalés pour plus de clarté, les points A_i repérant les mailles sont associés à un système de ressorts de longueur $\frac{a}{2}$, a étant la largeur de la maille, et de raideurs k_a et k_b .

Lorsque la maille est déformée dans le sens longitudinal, par application d'une force de traction par exemple, le schéma prend cette forme :



Dans ce schéma, si on définit par $\vec{e}_x$ un vecteur unitaire horizontal dirigé vers la droite et O un point origine de l'axe portant les point A_i alors on a posé pour chaque point M_0 de l'axe avant déformation devenu un point M après déformation :

$$\overrightarrow{OM_0} = x_{M_0} \vec{e}_x, \quad \overrightarrow{OM} = x_M \vec{e}_x, \quad \overrightarrow{M_0M} = \widetilde{x_M} \vec{e}_x$$

V Forces mécanique résultante sur les barycentres dans une maille :

La résultante des forces mécaniques exercées par les ressorts sur le barycentre $G_{\oplus,i}$ lorsqu'une déformation est présente est :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f_{G_{\oplus,i}}} &= \left(k_a (\overrightarrow{G_{\oplus,i}A_{i-1}} - \overrightarrow{G_{\oplus,i,0}A_{i-1,0}}) + k_b (\overrightarrow{G_{\oplus,i}A_i} - \overrightarrow{G_{\oplus,i,0}A_{i,0}}) \right) \vec{e}_x \\ &= \left(k_a ((x_{A_{i-1}} - x_{G_{\oplus,i}}) - (x_{A_{i-1,0}} - x_{G_{\oplus,i,0}})) + k_b ((x_{A_i} - x_{G_{\oplus,i}}) - (x_{A_{i,0}} - x_{G_{\oplus,i,0}})) \right) \vec{e}_x \\ &= \left(k_a (\widetilde{x_{A_{i-1}}} - \widetilde{x_{G_{\oplus,i}}}) + k_b (\widetilde{x_{A_i}} - \widetilde{x_{G_{\oplus,i}}}) \right) \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{f_{G_{\oplus,i}}} = (-(k_a + k_b) \widetilde{x_{G_{\oplus,i}}} + k_a \widetilde{x_{A_{i-1}}} + k_b \widetilde{x_{A_i}}) \vec{e}_x$$

De même :

$$\overrightarrow{f_{G_{\ominus,i}}} = (-(k_a + k_b) \widetilde{x_{G_{\ominus,i}}} + k_a \widetilde{x_{A_i}} + k_b \widetilde{x_{A_{i-1}}}) \vec{e}_x$$

VI Equilibre mécanique :

On se place dans un cas plus général où une force supplémentaire peut s'exercer, due à un champ électrostatique extérieur constant $\vec{E} = E \vec{e}_x$ comme celui produit entre les armatures d'un condensateur plan. Cette force est alors sur $G_{\oplus,i}$, porteur d'une charge δ , $\delta \vec{E}$ et sur $G_{\ominus,i}$ porteur d'une charge $-\delta$, $-\delta \vec{E}$.

L'équilibre des barycentres se traduit alors par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_{G_{\oplus,i}}} + \delta \vec{E} = \vec{0} \\ \overrightarrow{f_{G_{\ominus,i}}} - \delta \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} -(k_a + k_b) \widetilde{x_{G_{\oplus,i}}} + k_a \widetilde{x_{A_{i-1}}} + k_b \widetilde{x_{A_i}} + \delta E = 0 \\ -(k_a + k_b) \widetilde{x_{G_{\ominus,i}}} + k_a \widetilde{x_{A_i}} + k_b \widetilde{x_{A_{i-1}}} - \delta E = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \widetilde{x_{G_{\oplus,i}}} = \frac{k_a \widetilde{x_{A_{i-1}}} + k_b \widetilde{x_{A_i}} + \delta E}{k_a + k_b} \\ \widetilde{x_{G_{\ominus,i}}} = \frac{k_a \widetilde{x_{A_i}} + k_b \widetilde{x_{A_{i-1}}} - \delta E}{k_a + k_b} \end{cases}$$

VII moment dipolaire de la maille :

La maille i fait apparaître un dipôle de moment dipolaire :

$$\vec{p}_i = \delta \overrightarrow{G_{\ominus,i} G_{\oplus,i}} = \frac{2 \delta^2 E}{k_a + k_b} \vec{e}_x + \frac{\delta (k_b - k_a) (\widetilde{x_{A_i}} - \widetilde{x_{A_{i-1}}})}{k_a + k_b} \vec{e}_x$$

Ce vecteur se compose de deux termes, le premier étant uniforme, imposé par le champ $\vec{E}$ lorsqu'il existe. Le second terme est lié à la déformation du matériau et peut apparaître en l'absence de champ extérieur, par simple déformation longitudinale du matériau.

Dans ce dernier cas, on peut alors comprendre ainsi l'apparition de charges :

Remplaçons la ligne de maille par une ligne de dipôles apparus du fait d'une traction ou d'une compression, par exemple, en supposant $k_b > k_a$, hypothèse que nous conserverons jusqu'à la fin du document, sous la forme :

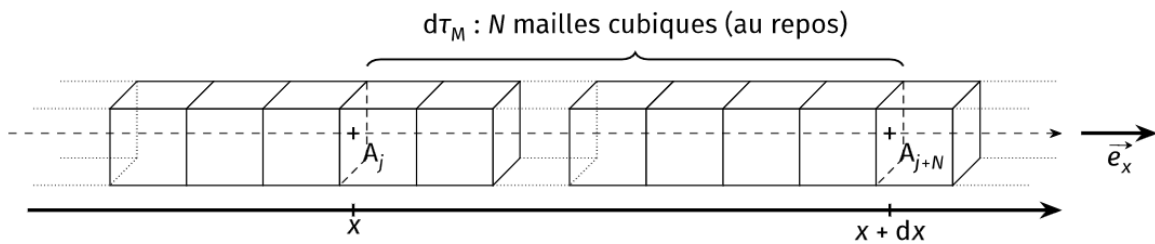
$$\ominus + - + \dots - + \oplus$$

On voit qu'une charge négative non compensée apparaît à gauche et une positive à droite tandis qu'à l'intérieur du matériau, les charges se compensent. Voilà l'origine des charges surfaciques opposées observées et de la tension mesurable qui en découle entre les surfaces opposées concernées. Nous verrons plus loin comment calculer une densité surfacique associée à ces charges.

A noter que l'effet piézo-électrique est lié à une dissymétrie d'actions dans la maille, représentée dans le modèle par des valeurs différentes de k_a et k_b .

VIII Modélisation à échelle mésoscopique : calcul d'une densité de moment dipolaire

Afin de modéliser la distribution de charge dans le matériau, on change d'échelle en considérant un volume à une échelle mésoscopique, en considérant N mailles cubiques entre un point $M_0 = A_{j,0}$ d'abscisse x et un point $M'_0 = A_{j+N,0}$ d'abscisse $x + dx$, où $dx = N a$ et $N \gg 1$.



On est alors amené à considérer un moment dipolaire par unité de volume, en considérant qu'un volume mésoscopique $d\tau_M$ apporte une contribution $d\vec{p}_M$ où :

$$\begin{aligned} d\vec{p}_M &= \sum_{i=1}^N \vec{p}_{j+i} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{2 \delta^2 E}{k_a + k_b} \vec{e}_x + \frac{\delta (k_b - k_a) (\widetilde{x_{A_{j+i}}} - \widetilde{x_{A_{j+i-1}}})}{k_a + k_b} \vec{e}_x \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{2 \delta^2 E}{k_a + k_b} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta (k_b - k_a) (\widetilde{x_{A_{j+i}}} - \widetilde{x_{A_{j+i-1}}})}{k_a + k_b} \right) \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2 N \delta^2 E}{k_a + k_b} + \frac{\delta (k_b - k_a)}{k_a + k_b} \sum_{i=1}^N (\widetilde{x_{A_{j+i}}} - \widetilde{x_{A_{j+i-1}}}) \right) \vec{e}_x$$

$$= \left(\frac{2 N \delta^2 E}{k_a + k_b} + \frac{\delta (k_b - k_a)}{k_a + k_b} (\widetilde{x_{A_{j+N}}} - \widetilde{x_{A_j}}) \right) \vec{e}_x$$

Notons alors $u(x)$ le déplacement longitudinal du point M_0 suite à la déformation, $u(x + dx)$ celui du point M'_0 alors : $(\widetilde{x_{A_{j+N}}} - \widetilde{x_{A_j}}) = u(x + dx) - u(x)$. Ainsi :

$$d\vec{p}_M = \left(\frac{2 N \delta^2 E}{k_a + k_b} + \frac{\delta (k_b - k_a)}{k_a + k_b} (u(x + dx) - u(x)) \right) \vec{e}_x$$

Or : $d\tau_M = N a^3$, $dx = N a$. Donc la densité volumique de moment dipolaire s'écrit, au premier ordre en $u(x)$:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}_M}{d\tau_M} = \left(\frac{2 \delta^2 E}{(k_a + k_b) a^3} + \frac{\delta (k_b - k_a)}{(k_a + k_b) a^2} \frac{du}{dx} \right) \vec{e}_x$$

On met alors ce vecteur sous la forme :

$$\vec{P} = \left(\epsilon_0 \chi E + e \frac{du}{dx} \right) \vec{e}_x$$

En posant :

$$\chi = \frac{2 \delta^2 E}{(k_a + k_b) a^3 \epsilon_0}, \quad e = \frac{\delta (k_b - k_a)}{(k_a + k_b) a^2}$$

où χ est qualifié de susceptibilité électrique et e de coefficient piézo-électrique (à ne pas confondre avec la charge élémentaire).

IX Expression approchée du potentiel créé par les charges du matériau

Rappelons qu'un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = q \overrightarrow{NP}$ créé en un point M situé à une distance r grande devant NP , au premier ordre, un potentiel :

$$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2}$$

où : $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}$.

Or on a également, en notant $\vec{\nabla}$ l'opérateur gradient :

$$\frac{\vec{u}}{r^2} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Et en un point M quelconque de l'espace, le potentiel créé par l'ensemble des charges du matériau piézo-électrique, appelées charges liées (car le matériau n'a pas d'électrons libres) est la somme des potentiels créés par chaque dipôle élémentaire de moment $\overrightarrow{dp_M}$ et à l'échelle

méso-scopique considérée, le potentiel de chaque dipôle peut être considéré comme ayant la forme donnée précédemment, soit apportant une contribution au potentiel :

$$dV(M) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{dp_M} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \vec{P}(M) \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) d\tau_M$$

Ainsi, en intégrant sur le volume $\mathcal{V}$ du matériau :

$$V(M) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{P}(M) \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) d\tau_M$$

X Calcul de la densité surfacique et de la densité volumique de charge

Nous allons utiliser le théorème d'intégration par partie pour une intégrale triple :

En notant $\vec{\nabla} \cdot$ l'opérateur divergence, l'application de la formule de dérivée d'un produit de fonctions donne l'identité :

$$\vec{\nabla} \cdot (f(M) \vec{A}(M)) = f(M) \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(M) + \vec{A}(M) \cdot \vec{\nabla} f(M)$$

Ainsi :

$$\vec{A}(M) \cdot \vec{\nabla} f(M) = \vec{\nabla} \cdot (f(M) \vec{A}(M)) - f(M) \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(M)$$

Appliqué à notre calcul cela donne :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{P}(M) \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) d\tau_M = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{r} \vec{P}(M) \right) d\tau_M - \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(M) \right) d\tau_M$$

Le premier terme se transforme en un flux sortant de la surface $\partial\mathcal{V}$ du matériau, par le théorème d'Ostrogradski :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{P}(M) \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) d\tau_M = \oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{1}{r} \vec{P}(M) \cdot \vec{n} dA - \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(M) \right) d\tau_M$$

Ainsi :

$$V(M) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{1}{r} \vec{P}(M) \cdot \vec{n} dA - \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(M) \right) d\tau_M \right)$$

On reconnaît le potentiel créé par une distribution surfacique $\sigma_{liée}$ à la surface du matériau et une distribution volumique $\rho_{liée}$ dans le volume du matériau définies par :

$$\sigma_{liée}(M) = \vec{P}(M) \cdot \vec{n} , \quad \rho_{liée}(M) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(M)$$

Plus précisément, dans le cas étudié, si nous définissons l'origine des abscisses à l'armature de gauche et si nous considérons un taux de déformation $\frac{du}{dx}$ constant dans tout le matériau, alors l'armature de gauche porte une densité surfacique de charges liées constante et négative :

$$\sigma_{liée}(0) = \vec{P}(0) \cdot (-\vec{e}_x) = -\left(\varepsilon_0 \chi E + e \frac{du}{dx} \right)$$

et l'armature droite également une densité constante de valeur opposée que nous noterons tout simplement :

$$\sigma_{liée} = \epsilon_0 \chi E + e \frac{du}{dx}$$

On retrouve un point déjà abordé en VII.

Le volume du matériau porte cependant une densité volumique de charges nulle car :

$$\rho_{liée}(M) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(M) = -\frac{d}{dx} \left(\epsilon_0 \chi E + e \frac{du}{dx} \right) = 0$$

XI Application au calcul de la capacité d'un condensateur plan avec diélectrique entre armatures

Considérons notre matériau piézo-électrique précédent, comme relié à ses faces gauche et droites aux armatures d'un condensateur plan. Le matériau est alors rigide. Il ne peut se déformer. On en déduit :

$$\sigma_{liée} = \epsilon_0 \chi E$$

Appliquons une tension $U > 0$ entre l'armature de gauche et l'armature de droite. Le matériau se polarise sous l'action du champ créé par les charges totales se trouvant sur les armatures du condensateur. Notons alors $\sigma_{libre} > 0$ la densité de charge apportée sur l'armature de gauche par le circuit (en fait des électrons libres prélevés sur cette armature et transférés à l'armature de droite).

L'armature de gauche porte alors la densité :

$$\sigma_{totale} = \sigma_{libre} - \sigma_{liée} = \sigma_{libre} - \epsilon_0 \chi E$$

et l'armature de droite porte la densité opposée.

Comme les charges libres ne créent pas de densité volumique dans le matériau tout comme les charges liées, le champ électrique entre les armatures donc dans le matériau est constant de valeur :

$$E = \frac{\sigma_{totale}}{\epsilon_0}$$

On en déduit :

$$\epsilon_0 E = \sigma_{libre} - \epsilon_0 \chi E$$

Soit :

$$\sigma_{libre} = \epsilon_0 (1 + \chi) E = \epsilon E$$

en posant : $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)$ appelée permittivité électrique du matériau.

La charge portée par l'armature gauche et correspondant à des électrons libres transférés via le circuit est donc, pour des armatures d'aire A :

$$Q = \sigma_{libre} A = \epsilon E A$$

Or par définition de la tension comme différence de potentiel et travail du champ électrostatique de l'armature gauche à l'armature droite, l'espace entre armatures étant L , nous avons :

$$U = E L$$

Ainsi :

$$Q = \frac{\varepsilon A}{L} U$$

La capacité du condensateur s'en déduit :

$$C = \frac{\varepsilon A}{L}$$