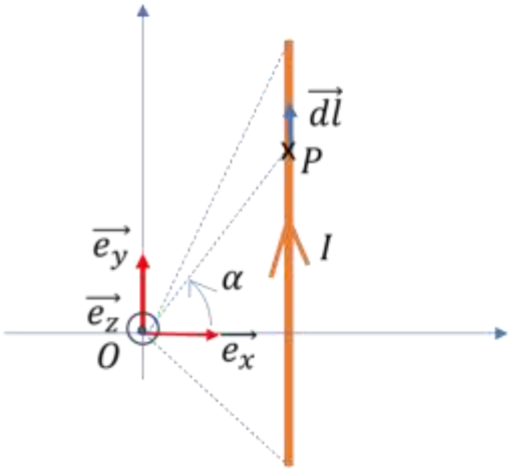
1) **Champ magnétique créé par un segment en un point O**



Paramétrage d'un point courant P par l'angle polaire $\alpha = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OP})$

Expression de $\overrightarrow{OP}$ dans la base orthonormée $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$:

$$\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}$$

Relation avec les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = OP\,cos(\alpha) \\ y = OP\,sin(\alpha) \end{cases}$$

D'où on tire :

$$\boxed{OP = \frac{x}{cos(\alpha)}, \quad y = x\,tan(\alpha)}$$

Puis :

$$\boxed{\overrightarrow{dl} = dy\,\overrightarrow{e_y} = \frac{x\,d\alpha}{cos^2(\alpha)}\,\overrightarrow{e_y}}$$

Contribution au champ d'un élément $\overrightarrow{dl}$ situé en un point P :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi}\,\frac{\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PO}}{OP^3} = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi}\,\frac{x\,d\alpha}{cos^2(\alpha)}\,\frac{cos^3(\alpha)}{x^3}\,\overrightarrow{e_y} \wedge (-x\,\overrightarrow{e_x} - y\,\overrightarrow{e_y})$$

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi\,x}\,cos(\alpha)\,d\alpha\,\overrightarrow{e_z}}$$

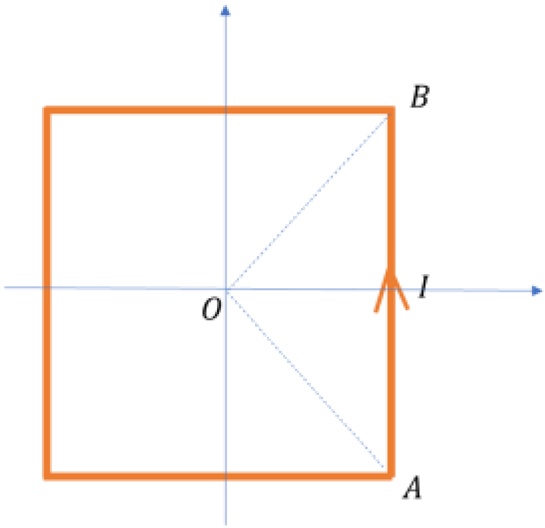
Champ créé par le segment :

$$\vec{B}(O) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\vec{B} = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi\,x}\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} cos(\alpha)\,d\alpha\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi\,x}\,\big(sin(\alpha_2) - sin(\alpha_1)\big)\,\overrightarrow{e_z}}$$

2) **Applications au calcul du champ créé par une spire en son centre.**

Cas d'une spire carrée de côté a :



Chacun des 4 segments apporte la même contribution au champ donc le champ est égal à quatre fois celui produit par le segment $[A\,B]$ pour lequel on a :

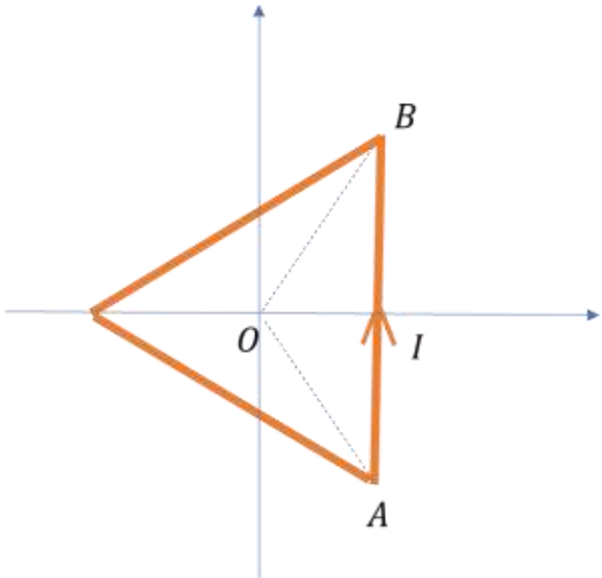
$$x = \frac{a}{2}, \quad \alpha_1 = -\frac{\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi :

$$\vec{B}(O) = 4\,\frac{\mu_0\, I}{4\,\pi\,\frac{a}{2}}\left(sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\boxed{\vec{B}(O) = \frac{2\,\sqrt{2}\,\mu_0\, I}{\pi\, a}\,\overrightarrow{e_z}}$$

Cas d'une spire triangulaire équilatérale de côté a :



Chacun des 3 segments apporte la même contribution au champ donc le champ est égal à trois fois celui produit par le segment $[A\ B]$ pour lequel on a, en notant h la hauteur :

$$x = \frac{h}{2} = \frac{a\ cos(30°)}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}, \quad \alpha_1 = -\frac{\pi}{3}, \alpha_2 = \frac{\pi}{3}$$

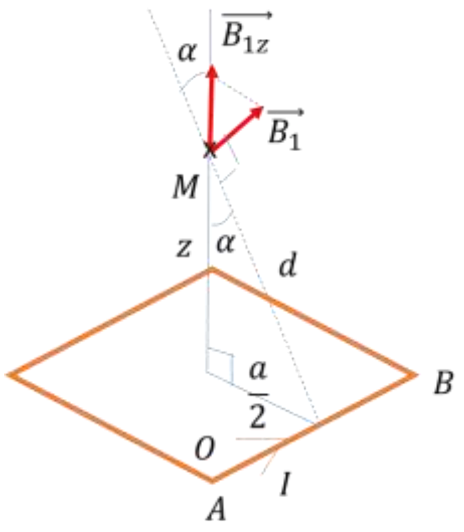
Ainsi :

$$\vec{B}(O) = 3\frac{\mu_0\ I}{4\ \pi\ \frac{a\sqrt{3}}{4}}\left(sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{B}(O) = \frac{\sqrt{3}\,\mu_0\ I}{\pi\ a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \overrightarrow{e_z}$$

$$\boxed{\vec{B}(O) = \frac{3\ \mu_0\ I}{\pi\ a}\ \ \overrightarrow{e_z}}$$

3) Champ créé par une spire carrée de côté a en un point de son axe.

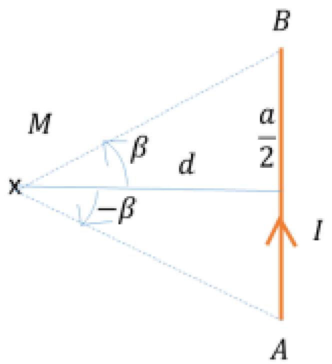


Par symétrie, le champ est porté par $\overrightarrow{e_z}$. Notons $\overrightarrow{B_{1z}}$ la composante sur $\overrightarrow{e_z}$ du champ $\overrightarrow{B_1}$ créé par un côté du carré, par exemple $[A, B]$. Alors, en notant que l'angle $\left(\overrightarrow{B_1}, \overrightarrow{B_{1z}}\right)$ mesure $\frac{\pi}{2} - \alpha$:

$$\overrightarrow{B_{1z}} = \left\|\overrightarrow{B_1}\right\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \overrightarrow{e_z} = \left\|\overrightarrow{B_1}\right\| \sin(\alpha) \overrightarrow{e_z}$$

Sachant :

$$\sin(\alpha) = \frac{\frac{a}{2}}{d} = \frac{a}{2\,d}$$



$$\left\|\overrightarrow{B_1}\right\| = \frac{\mu_0\, I}{4\,\pi\, d} \left(\sin(\beta) - \sin(-\beta)\right) = \frac{2\,\mu_0\, I \sin(\beta)}{4\,\pi\, d}$$

$$\sin(\beta) = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2}}$$

Donc :

$$\left\|\overrightarrow{B_1}\right\| = \frac{\mu_0\ I\ a}{4\ \pi\ d\ \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2}}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{B_{1z}} = \frac{\mu_0\ I\ a^2}{8\ \pi\ d^2\ \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2}}\overrightarrow{e_z}$$

Or :

$$d^2 = z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = z^2 + \frac{a^2}{4}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{B_{1z}} = \frac{\mu_0\ I\ a^2}{8\ \pi\ \left(z^2 + \frac{a^2}{4}\right)\ \sqrt{\frac{a^2}{4} + z^2 + \frac{a^2}{4}}}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{B_{1z}} = \frac{\mu_0\ I\ a^2}{8\ \pi\ \left(z^2 + \frac{a^2}{4}\right)\ \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}}\overrightarrow{e_z}$$

Le champ créé par les quatre segments du carré est donc égal à quatre fois ce vecteur :

$$\boxed{\vec{B} = 4\ \overrightarrow{B_{1z}} = \frac{\mu_0\ I\ a^2}{2\ \pi\ \left(z^2 + \frac{a^2}{4}\right)\ \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}}\overrightarrow{e_z}}$$