Les nombres

A la base des sciences se trouvent la géométrie et les nombres permettant d'en mesurer les objets. Une bonne connaissance des nombres et de leurs opérations élémentaires est donc indispensable à toute démarche d'apprentissage.

I Qu'est-ce qu'un nombre ? L'entier naturel représenté dans divers systèmes

Historiquement , la définition la plus naturelle est celle qui conduit à l'élaboration de la famille des nombres entiers naturels :

Un nombre est un ensemble de symboles permettant de décrire une quantité afin de la mémoriser. L'écriture d'un nombre dépend d'un système de représentation. Nous utilisons un système décimal qui est un cas particulier des systèmes positionnels à base. Un ordinateur utilise un système de représentation binaire avec des 0 et des 1 qui est un système positionnel de base deux.

Prenons un exemple, pour illustrer différents systèmes de représentation de nombres entiers naturels.

Voici différentes quantités représentées dans quatre systèmes différents :

quantité	Système romain	Système décimal	Système binaire	Système positionnel en base 3
*	I	1	1	1
**	II	2	10	2
***	III	3	11	10
****	IV	4	100	11
*****	V	5	101	12
******	VI	6	110	20
*******	VII	7	111	21
********	VIII	8	1000	22
*********	IX	9	1001	100
**********	X	10	1010	101
***********	XI	11	1011	102

Comme nous le constatons, le système utilisant le moins de symboles est le système binaire, c'est-à-dire le système positionnel de base 2, la base étant formée des symboles 0 et 1 appelés chiffres. Vient ensuite le système positionnel de base 3 qui possède trois chiffres seulement, 0,1,2. Ensuite c'est le système romain avec les symboles I, V, X mais aussi C (cent), M (mille). Puis le système décimal avec ses dix chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Mais il faut bien prendre garde que l'écriture 10 n'a pas le même sens en base 2, en base 3 et en base dix. D'ailleurs il n'y a qu'en base dix que l'écriture 10 se lit dix. Il faut lire sinon « un zéro ».

Afin de comprendre comment fonctionnent ces systèmes, nous allons partir de la quantité à représenter par un nombre de la dernière ligne du tableau : ***********

En binaire, il s’agit d’abord de grouper par 2 les étoiles à compter pour former ce que nous appellerons des « deuzaines » par analogie avec les dizaines :

** ** ** ** ** *

Ici il reste une étoile solitaire, elle forme le chiffre des unités, 1. Pour une quantité quelconque, il ne pourrait rester que 0 ou 1, d’où l’emploi de ces deux symboles seulement.

Ensuite on regroupe à nouveau par 2 les deuzaines, pour former ce que nous appellerons des « quatraines » :

** ** ** ** ** *

Ici il reste une deuzaine solitaire, elle formera le chiffre des deuzaines,1

Ensuite on regroupe à nouveau par 2 les quatraines, pour former ce que nous appellerons des « huitaines » :

** ** ** ** ** *

Ici il ne reste plus de quatraine solitaire, le chiffre des quatraines sera 0 et il reste seulement une huitaine, le chiffre des huitaines sera donc 1.

D’où la représentation binaire : 1011 qui signifie :

$$1\ \mathit{huitaine}\ 0\ \mathit{quatraine}\ 1\mathit{deuzaine}\ 1\ \mathit{unit\acute{e}}$$

Chaque chiffre indique donc par sa position une quantité :

Le premier est une quantité d’unités

Le second une quantité de 2 unités (deuzaines)

Le troisième une quantité de 2 x 2 unités (quatraines)

Le quatrième une quantité de 2 x2 x 2 unités (huitaines)

Et ainsi de suite, d’où l’appellation de **système positionnel**.

Dans le système positionnel de base 3, chaque chiffre parmi 0,1,2 indique pour :

le premier, une quantité d’unités

le second, une quantité de 3 unités (troizaines)

le troisième une quantité de 3 x 3 unités (neuvaines)

le quatrième une quantité de 3 x3 x 3 unités (vingt-septaines)

Et ainsi de suite.

Dans l’exemple, cela donne :

*** *** *** ** -> chiffre des unités = 2

*** *** *** ** -> chiffre des troizaines = 0, chiffre des neuvaines = 1

D’où le nombre : 102 qui signifie :

$$1\ neuvaine\ 0\ troizaine\ 2\ unités$$

Dans le système positionnel de base dix, qui est appelé système décimal et est celui que nous employons couramment, chaque chiffre indique pour :

le premier, une quantité d’unités

le second, une quantité de dix unités (dizaines)

le troisième, une quantité de dix fois dix unités (centaines)

le quatrième, une quantité de dix fois dix fois dix unités (milliers)

Et ainsi de suite.

Dans l’exemple, cela donne :

$\boxed{**********}$ * -> chiffre des unités = 1, chiffre des dizaines =1

D’où le nombre : 11 qui signifie :

$$1\ dizaine\ \ 1\ unité$$

Dans le système romain, on cherche à regrouper les étoiles en paquets de mille (symbole M) cent (C)

dix (X) et unités (I). On obtient alors le nombre XI.

<u>Avantage des systèmes positionnels</u> :

Les systèmes positionnels sont très pratiques pour les opérations de base que sont l’addition et la multiplication ainsi que leurs opérations associées soustraction et multiplication, à condition de mémoriser des tables.

Voici les tables du système binaire (base 2) :

Addition

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Multiplication

×	0	1
0	0	1
1	1	1

Et un exemple d'addition

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1 \\ +\underline{\quad 1\,1} \\ 1\,0\,1\,0 \end{array}$$

Voici les tables du système ternaire (base 3) :

Addition

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Multiplication

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Et un exemple d'addition

$$\begin{array}{r} 1\,0\,2 \\ +\underline{\quad 2\,2} \\ 2\,0\,1 \end{array}$$

Et de multiplication :

$$\begin{array}{r} 1\,0\,2 \\ \underline{\times \quad 2\,2} \\ 2\,1\,1 \\ \underline{2\,1\,1\;.} \\ 1\,0\,0\,2\,1 \end{array}$$

Voici les tables du système décimal (base 10)

Addition

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Multiplication

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

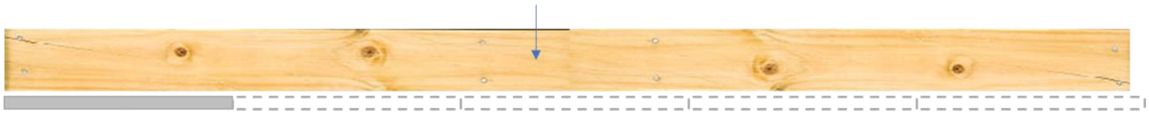
Il existe aussi un système positionnel hexadécimal (de base 16) très employé en codage informatique et dont les seize chiffres sont 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A ,B,C,D,E,F. Les tables d'addition et de multiplication contiennent donc seize fois seize termes. Même si ces tables sont symétriques, car on peut inverser l'ordre des termes dans les opérations d'addition et de multiplication, l'usage d'une telle base par les humains aurait nécessité un fastidieux travail de mémorisation.

Avec les systèmes ayant peu de chiffres dans leur base comme le système binaire et le système ternaire, les tables sont faciles à mémoriser, en revanche le nombre de chiffres pour écrire un nombre devient vite important. Voilà pourquoi l'homme a trouvé un bon compromis en choisissant un système décimal donc de base dix, certainement en lien avec sa capacité à facilement dénombrer une dizaine d'objets en utilisant les dix doigts d'une main.

II Qu'est-ce qu'un nombre ? Le nombre décimal

<u>Le problème de la mesure</u> : un pas vers la géométrie

Ayant défini les nombres entiers pour dénombrer une quantité d'objets, on en vient tout naturellement à la mesure de la grandeur d'un objet comme une planche de bois, en définissant un étalon servant d'unité.



Le problème est qu'on ne peut pas nécessairement mettre bout à bout un nombre entier d'étalons pour définir la longueur d'une planche. Dans l'exemple ci-dessus, la planche est plus longue que 4 étalons mis bout à bout et plus petite que 5. En n'utilisant que des nombres entiers naturels, on ne pourra que donner une valeur inférieure et une valeur supérieure de la longueur de cette planche et on l'écrira, pour l'étalon pris comme unité :

$$4\, unités\ < Longueur < 5\, unités$$

Ceci serait insuffisant pour la construction des bâtiments par exemple. Il faut donc inventer des nombres permettant de mesurer plus précisément. Ce sont les nombres décimaux (positifs à ce stade). On les obtient en prolongeant le principe du système décimal dans les divisions de l'unité. Ainsi, si l'étalon est idéalement découpé en dix parties égales, une partie aura pour mesure un dixième d'unité. Si cette partie est à nouveau découpée en dix partie égales, il en faudra cent pour reconstituer une unité. On la qualifiera de centième d'unité et ainsi de suite, d'où la représentation générale d'un nombre décimal dans le système positionnel de base 10 :

milliers	**centaines**	**dizaines**	**unité**	**dixièmes**	**centièmes**	**millièmes**	**Etc…**

Sauf que, lorsqu'il y a des divisions de l'unité comme des dixièmes, des centièmes ou des millièmes, il faut un code pour repérer la position de l'unité, et c'est la virgule que l'on place entre le chiffre des unités et celui des dixièmes comme dans l'exemple :

$$16{,}231$$

Ce qui signifie :

$$1\ dizaine\ 6\ unités\ \ 2\ dixièmes\ 3\ dixièmes\ 1\ millième$$

Les chiffres après la virgule s'appellent les **décimales**. Notre nombre précédent en a 3.

Etant donnée une unité comme le mètre de symbole m, ou bien le gramme de symbole g ou bien le litre de symbole L, on utilise des préfixe latins et grecs pour définir des sous-unités ou bien des sur-unités, et dont voici les correspondances, noms et symboles :

	milliers	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
noms	**kilo**	**hecto**	**déca**		**déci**	**centi**	**milli**
préfixes	**k**	**h**	**da**		**d**	**c**	**m**

Ainsi :

Un décigramme de symbole dg est un dixième de gramme

Un hectolitre de symbole hL est une centaine de litres.

Les ordinateurs utilisent un système semblable mais en binaire :

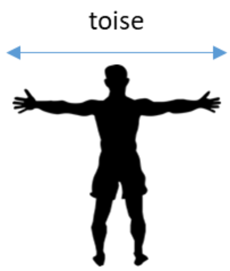
huitaines	quatraines	deuzaines	unité	demis	quarts	huitièmes	Etc…

Ainsi, le nombre 0,101 écrit en système binaire signifie :

$$0\ unités\ 1\ demi\ 0\ quart\ \ 1\ huitième\ d'unités$$

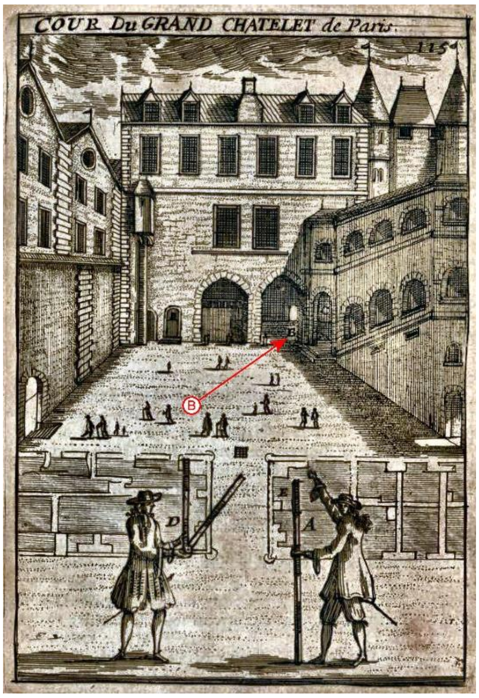
<u>De la toise au mètre-étalon : un peu d'histoire</u>

Au moyen âge on utilisait comme étalon une toise, laquelle correspondait grosso modo à la distance entre les extrémités des mains d'un homme ayant les bras tendus à l'horizontale.



La toise de Paris était matérialisée par une barre de fer scellée dans le mur du Grand Châtelet et munie de deux ergots. Elle ne mesurait pas loin de 2 mètres.

La toise se retrouva faussée par un affaissement de pilier en 1667 ce qui réveilla l'idée de définir un nouvel étalon fondé sur une mesure non plus humaine mais terrestre



Fin XVIIIè , après la révolution française, l'assemblée chargea l'Académie des Sciences d'une mission consistant à mesurer un arc de méridien passant par Paris, entre les villes de **Dunkerque et de Barcelone,** ceci afin de définir un nouvel étalon appelé **mètre**.

La mesure s'effectua sur huit ans par un procédé de triangulation utilisant une centaine de triangles. La mesure de l'arc de méridien entre Dunkerque et Barcelone conduisit à une valeur de 551 584,72 toises tandis que la mesure de différence de latitude était $9° \, 40'31{,}9''$. Ainsi, pour un quart de méridien correspondant donc à 90°, on put établir par extrapolation, la longueur d'un quart de méridien à **5 130 740 toises**, et on fixa arbitrairement le mètre étalon en considérant que cette longueur serait mesurée par dix millions (**10 000 000**) de mètres, ce qui établit le mètre à environ la moitié d'une toise.

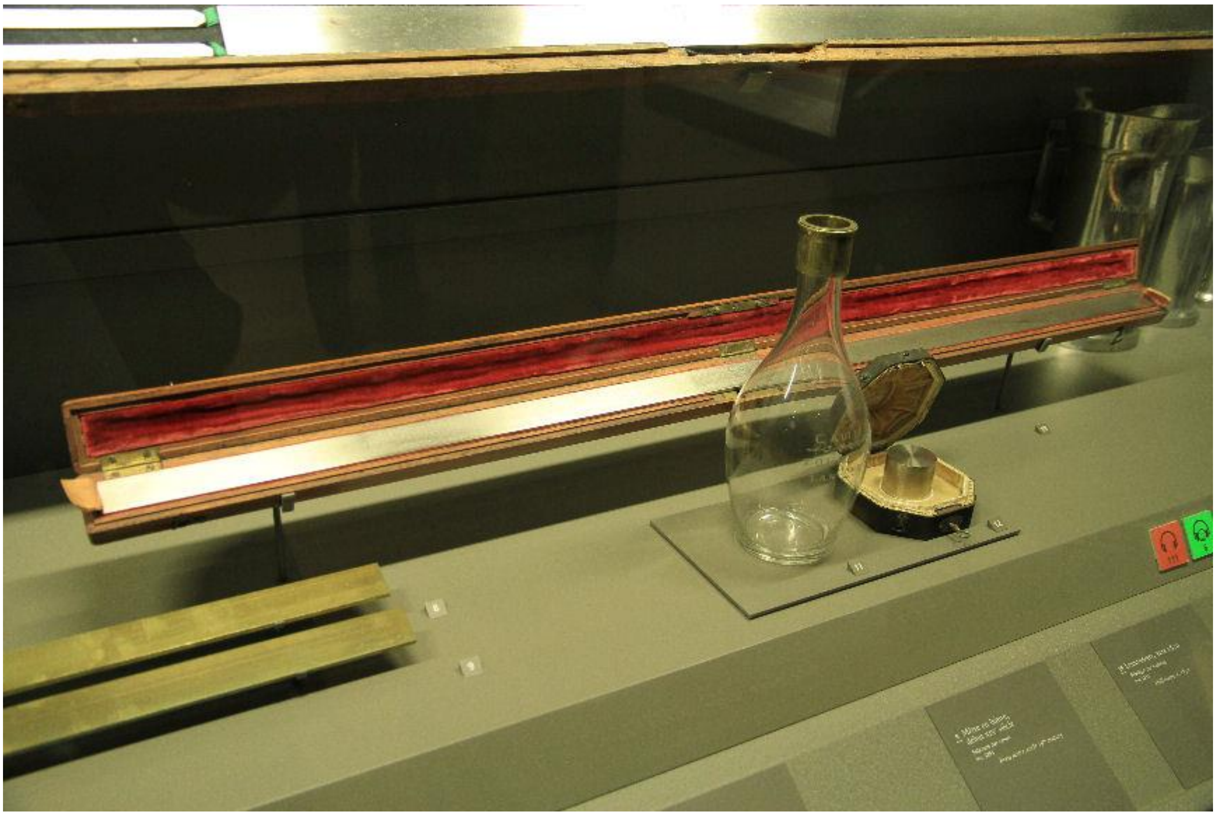
Plus exactement, **Le 9 juillet 1799**, un mètre étalon fut présenté au conseil des cinq-cents, défini par :

$$\boldsymbol{1\ m\grave{e}tre = 0{,}5130740\ toise}$$

Soit :

$$\boldsymbol{1\ toise = \frac{1}{0{,}5130740} \approx 1{,}949\ m}$$

Un mètre-étalon fut coulé en platine irridié, afin de ne pas trop se déformer sous les variations de température et il fut conservé au bureau des poids et mesures à Sèvres et servit de référence jusqu'en 1960.



Un mètre-étalon est une barre de 20 x 20 mm de et de 102 cm de long. Les graduations donnent la longueur du mètre avec une précision de 0,000 000 1 m soit un dix millionième de mètre.

On peut encore trouver trace de mètres-étalon sur certains murs de Paris comme sur l'un en marbre de la rue de Vaugirard mais dont la précision n'égale pas celui de Sèvres.

La précision du mètre-étalon en platine étant devenue insuffisante, le mètre étalon fut redéfini par d'autres principes physiques non géométriques, notamment la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, à partir de 1960.

III Qu'est-ce qu'un nombre ? Le nombre fractionnaire

Considérons une unité découpée idéalement en trois parties égales. Posons nous alors la question si la partie obtenue peut être mesurée par un nombre décimal. Notons pour cela que :

$$3 \times 0{,}3 = 0{,}9$$

$$3 \times 0{,}33 = 0{,}99$$

$$3 \times 0{,}333 = 0{,}999$$

Si l'unité est le mètre et si la part obtenue vise à mesurer la longueur d'une planche de bois, un menuisier ne pouvant pas faire de différence entre 1 m et 0,999 m, se contenterait de 0,333 m soit encore 333 mm.

Les nombres décimaux sont donc parfaitement suffisants pour les besoins de mesure pratique. D'ailleurs une règle ne crée généralement pas de divisions plus fines que le millimètre.

Mais les anciens avaient compris que les objets qui nous étaient familiers gagnaient à être idéalisés dans des formes géométriques pures comme des cercles, des disques, des carrés, des rectangles, des triangles qui n'ont d'existence que dans l'esprit qui les conçoit, car ils n'ont pas d'épaisseur (qu'est ce qu'un point dans le monde réel ?)

Aussi faut il des nombres qui permettent de mesurer dans ce domaine idéalisé. L'esprit peut alors pousser la logique précédente à l'infini, en concevant une infinité de chiffres 3 derrière la virgule et donner sens à cette écriture :

$$3 \times 0{,}3333333333 \dots \dots = 0{,}9999999999 \dots ..$$

Ainsi qu'à cette écriture :

$$0{,}9999999999 \dots . = 1$$

Donc :

$$3 \times 0{,}3333333333 \dots \dots = 1$$

La longueur de la partie obtenue est appelée tiers d'unité et on utilise le symbole de division : ou / pour la représenter sous la forme 1 :3 ou 1/3 ou encore sous la forme dite fractionnaire :

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333333333 \dots .$$

Ce nombre n'est pas un nombre décimal car il ne peut pas se représenter avec un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule.

A noter qu'à l'inverse, un nombre décimal peut se représenter avec une infinité de chiffres non nuls après la virgule comme :

$$2{,}7 = 2{,}699999999 \dots ..$$

Cependant, on privilégiera la représentation la plus simple.

On appelle alors nombre fractionnaire (en fait positif pour l'instant) toute nombre obtenu par la division d'un nombre entier naturel par un autre entier naturel non nul.

Voyons une propriété essentielle de tels nombres sur un exemple, celui de 5 divisé par 7. La division euclidienne fait apparaitre une propriété remarquable :

$$\begin{array}{l|l} 5{,}0000000 & 7 \\ \hline \;\;10 & \\ \;\;\;\;30 & 0{,}714285 \\ \;\;\;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5 & \end{array}$$

La sixième décimale (5) fait apparaitre un reste, 5, qui est le chiffre de départ. Donc en poursuivant la division indéfiniment, la même séquence de décimale va se reproduire à l'infini. Ainsi :

$$\frac{5}{7} = 0{,}714285\ 714285\ 714285 \ldots ..$$

On peut comprendre aisément qu'il en sera ainsi de toute division d'un nombre entier par 7 car une telle division génère 7 restes possibles, 0,1,2,3,4,5,6. Ainsi, sur les huit premières décimales, il en y en aura au moins deux qui auront généré un même reste et seront donc égales et donc toutes les décimales comprises entre ces deux décimales se reproduiront à l'infini comme dans l'exemple précédent.

Plus généralement, il en va ainsi de tous les nombres fractionnaires par un raisonnement analogue et on appelle **période** la suite de décimales qui se répète à l'infini. En voici des exemples que vous pouvez vérifier par division infinie :

Division de 234 par 11 :

$$\begin{array}{l|l} 234 & 11 \\ \hline \;\;14 & 21{,}27 \\ \;\;\;\;\boxed{3}0 & \\ \;\;\;\;\;\;80 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\boxed{3} & \end{array}$$

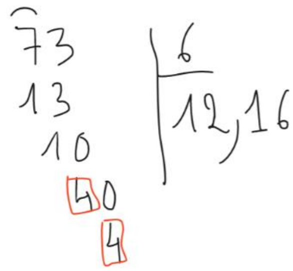
mêmes restes

Ainsi :

$$\frac{234}{11} = 21{,}27\ 27\ 27 \ldots$$

La période est 27

Division de 73 par 6 :

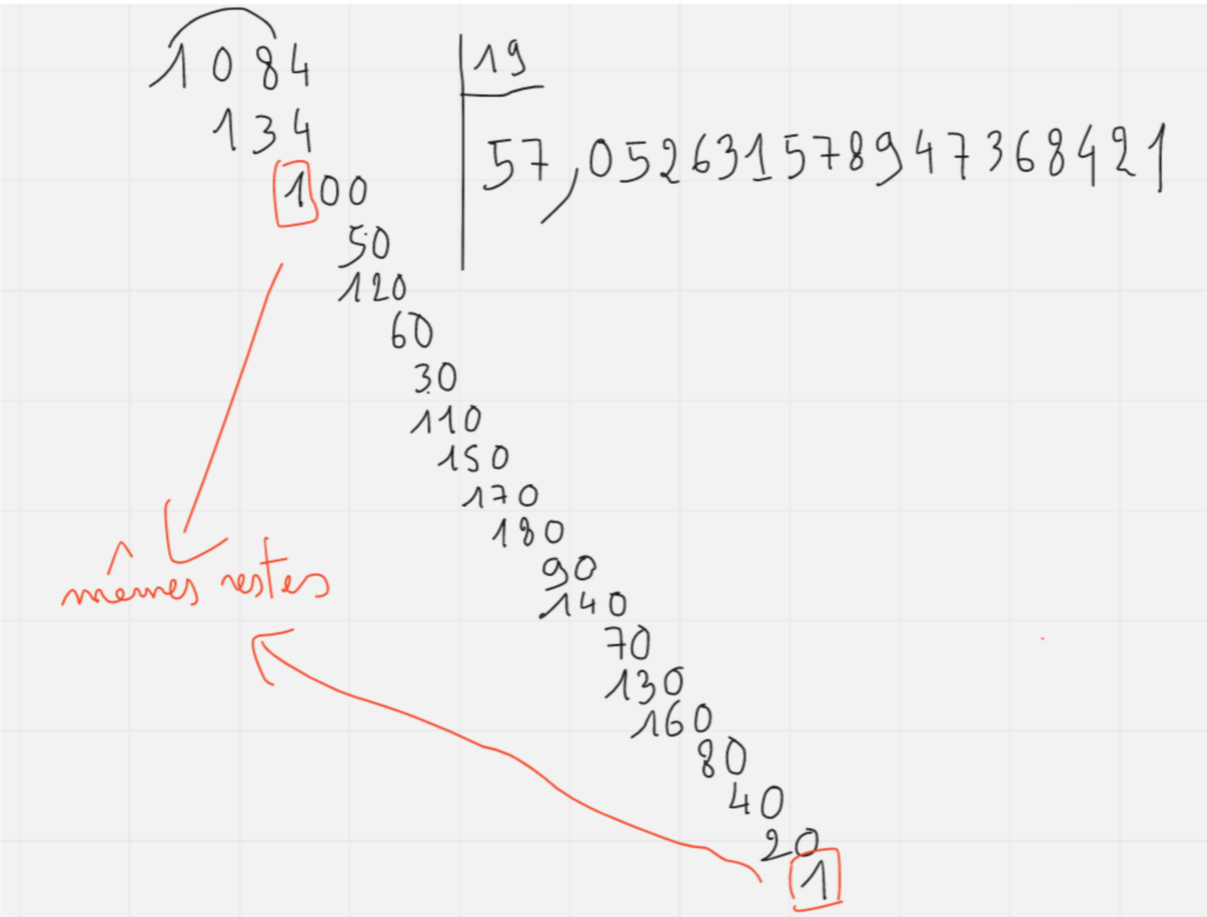


Ainsi :

$$\frac{73}{6} = 12{,}166666\ \ldots$$

La période est 6.

Division de 1084 par 19 :



Ainsi :

$$\frac{73}{6} = 57{,}052631578947368421\ 052631578947368421\ \ldots$$

La période est 052631578947368421

IV Qu'est-ce qu'un nombre ? Le nombre irrationnel

Les nombres fractionnaires sont également appelés nombres rationnels car la division d'un nombre entier naturel par un autre est encore appelé ratio. La forme qui les fait apparaitre comme un nombre entier suivi par un nombre fini ou infini de décimales est appelé **développement décima**l.

Dans les nombres permettant de mesurer des objets idéalisés, on peut imaginer, en s'inspirant des développements décimaux des nombres fractionnaires, des nombres qui n'auraient pas de développement décimal à répétition périodique, donc pas de période comme :

0,101001000100001000000…..

ou

0,0100100010000100000001….

ou encore un **nombre univers**, c'est-à-dire un nombre qui contient tout nombre entier naturel dans la suite de ses décimales :

0,012345678910111213141516171819202122223….

obtenu en mettant en décimales tous les nombres entiers naturels bout à bout ?

Ces nombres qui ne sont pas des nombres rationnels sont qualifiés naturellement de nombres **irrationnels**.

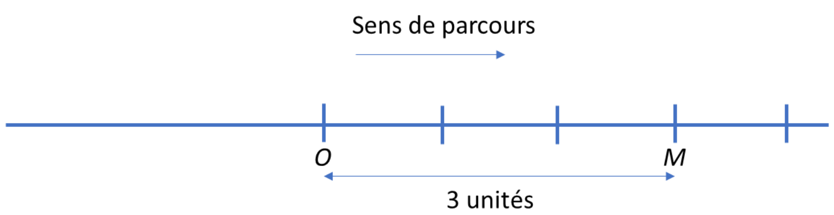
Nous verrons que les nombres rationnels forment une famille soudée, on fit qu'ils forment un **corps** en mathématiques, pour les opérations de base que sont l'addition et la multiplication ainsi que les opérations associées que sont la soustraction et la division, c'est-à-dire que le résultat de ces opérations donne des nombres encore rationnels, ce qui n'est pas le cas des nombres irrationnels comme le montre l'exemple :

$$0{,}10100100010000 \ldots . + 0{,}01011011101111 \ldots = 0{,}11111111111111 \ldots = \frac{1}{9}$$

V Qu'est-ce qu'un nombre ? Le nombre relatif

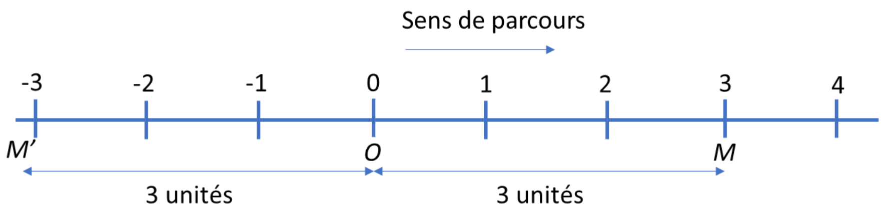
Si les nombres ont eu d'abord un usage pour compter des quantités d'objets ou bien faire des mesures géométriques, ils se sont avérés par la suite utiles pour se repérer sur un chemin, que nous prendrons rectiligne pour simplifier, surtout avec l'avènement d'une science appelée mécanique, laquelle amène à définir les coordonnées d'un point dans un repère, selon une démarche initiée par Descartes.

Considérons donc un chemin dont nous repérerons l'origine par un point O appelé **origine** et pour lequel nous définirons un sens de parcours. Nous pouvons équiper le chemin avec des bornes pour s'y repérer, comme les bornes kilométriques équipent les routes.



Sur un chemin idéalisé, tous les nombres cités précédemment, naturels, décimaux, fractionnaires, irrationnels peuvent être employés pour repérer la distance entre l'origine du chemin et un point quelconque du chemin dans le sens considéré. Toutefois, un point situé dans le sens de parcours inverse ne peut pas être représenté par un de ces nombres. On peut bien définir une distance à l'origine mais pour le distinguer du point situé à même distance dans l'autre sens, on ajoute un symbole, le moins (-).

On peut alors graduer le chemin dans l'autre sens avec des bornes portant un des nombres cités précédemment précédés de ce signe.



Dans le monde idéalisé de la géométrie, une droite graduée par la définition d'une origine , d'une unité et d'un sens de parcours est appelé **axe**.

Un point sur un axe est repéré par un nombre dit **relatif**, appelé **abscisse**.

Exemples :

Nombre entier relatif : -3

Nombre décimal relatif : : $-2{,}57$

Nombre rationnel relatif : $-\frac{1}{3} = -0{,}33333 \dots ..$

Nombre irrationnel relatif : $-0{,}10100100010000 \dots$

On a ainsi créé une suite d'ensembles emboités comme des poupées russes :

L'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}$

L'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$ (comme Zahl qui signifie nombre en allemand)

L'ensemble des décimaux noté $\mathbb{D}$

L'ensemble des nombres rationnels noté $\mathbb{Q}$ (comme quotient)

L'ensemble des nombre réels noté $\mathbb{R}$ qui est la réunion de l'ensemble des rationnels et des irrationnels.