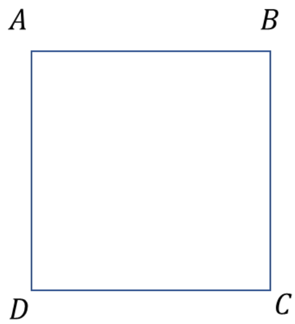
Le nombre d'or

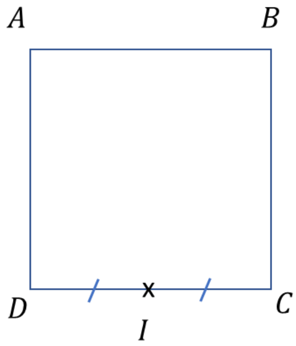
1) Le rectangle d'or :

Un rectangle d'or est un rectangle obtenu par la construction suivante :

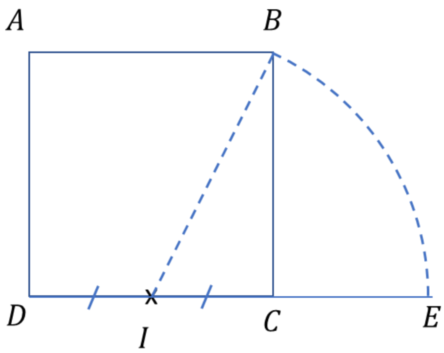
a) On commence par dessiner un carré de côté quelconque.



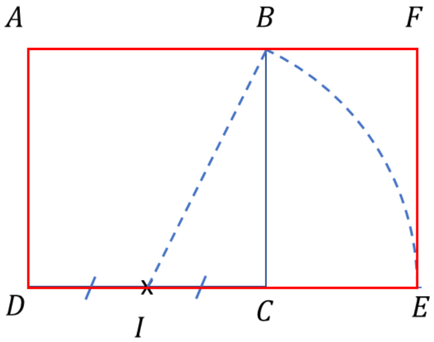
b) On repère le milieu I d'un côté :



c) A l'aide d'un compas, on repère le point E intersection du cercle de rayon IB avec la droite (DC)



d) On complète avec le point F pour former un rectangle $A\ D\ E\ F$ qui est un rectangle d'or



Voyons alors les propriétés de ce rectangle d'or. Le choix de l'unité étant arbitraire, nous pouvons, pour simplifier les calculs prendre la longueur DI pour unité.

<u>1ère propriété : Rapport de la longueur à la largeur :</u>

Le triangle $B\,C\,I$ étant rectangle en C avec $IC = 1, CB = 2$, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$IB^2 = IC^2 + CB^2$$

Soit :

$$IB^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

Donc :

$$IB = \sqrt{5}$$

Ainsi :

$$IE = \sqrt{5}$$

Et :

$$DE = DI + IE = 1 + \sqrt{5}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{DE}{AD} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

Ce rapport est appelé **nombre d'or** et il est noté avec la lettre grecque phi, à savoir :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}$$

Calculons en une valeur approchée manuellement :

Rappelons que par définition $\sqrt{5}$ est l'unique nombre positif vérifiant :

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

Or :

$$2 \times 2 = 4$$

$$3 \times 3 = 9$$

donc :

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

Puis en testant les décimaux à un chiffre après la virgule situés entre 2 et 3 en commençant par celui du milieu 2,5, on aboutit à :

$$2{,}2 \times 2{,}2 = 4{,}84$$

$$2{,}3 \times 2{,}3 = 5{,}29$$

donc :

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$$

Et ainsi de suite pour aboutir à :

$$2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361$$

Ce qui conduit à cette valeur approchée du nombre d'or :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi \approx \frac{3{,}236}{2} = 1{,}618}}$$

<u>2ème propriété : Le rectangle $C\ E\ F\ B$ est également un rectangle d'or</u>

Rappelons la règle suivante pour prouver l'égalité de deux fractions, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Il faut et il suffit de prouver que l'on a l'égalité des produits en croix :

$$a \times d = b \times c$$

Or :

$$\frac{FE}{CE} = \frac{FE}{IE - IC} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$$

Nous allons donc prouver que l'on a :

$$\frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Il suffit de noter pour cela que, en appliquant la distributivité du produit par rapport à la soustraction que l'on a :

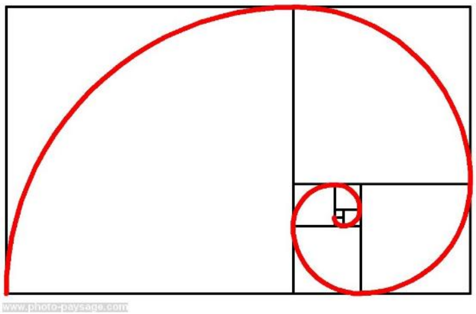
$$\left(1 + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5} - 1\right) = \left(1 + \sqrt{5}\right) \times \sqrt{5} - \left(1 + \sqrt{5}\right) \times 1$$

$$= \left(1 \times \sqrt{5} + \sqrt{5} \times \sqrt{5}\right) - \left(1 \times 1 + \sqrt{5} \times 1\right) = \left(\sqrt{5} + 5\right) - \left(1 + \sqrt{5}\right) = 5 - 1 = 4 = 2 \times 2$$

et donc que les produits en croix sont égaux.

Spirale de Fibonacci :

En inscrivant un carré de côté $[BF]$ dans le rectangle $B\ F\ E\ C$, on fait apparaitre un nouveau rectangle d'or et l'opération peut être répétée à l'infini. On peut alors créer une **spirale dite de Fibonacci** en inscrivant dans chaque carré un quart de cercle comme sur la figure suivante.



On peut démontrer (voir sur la page mathématiques du lycée) que **le nombre d'or est le rapport de la longueur de la spirale tracée à compter du second carré à la longueur du quart de cercle inscrit dans le premier carré.**

Suite de Fibonacci :

La suite de Fibonacci est la suite des puissances du nombre d'or :

$$1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \dots, \varphi^n, \varphi^{n+1}, \varphi^{n+2}$$

Elle possède une propriété remarquable qui est que tout terme est la somme des deux qui le précèdent. Cela repose sur cette propriété du nombre d'or :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi^2 = \varphi + 1}}$$

En effet :

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2 \times 2}$$

$$= \frac{1 \times 1 + 1 \times \sqrt{5} + \sqrt{5} \times 1 + \sqrt{5} \times \sqrt{5}}{4} = \frac{1 + 2 \times \sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{2 \times (3+\sqrt{5})}{2 \times 2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2 + (1+\sqrt{5})}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$$

Et donc, pour tout entier naturel n :

$$\varphi^n \varphi^2 = \varphi^n(\varphi + 1)$$

$$\varphi^{n+2} = \varphi^n \times \varphi + \varphi^n \times 1$$

Donc :

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$$