Critères de divisibilité des nombres entiers naturels

Divisibilité par 2 :

Un nombre entier naturel est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est pair, c'est-à-dire est soit 0,2,4,6,8.

Preuve : limitons nous sans nuire à la généralité à un nombre à 4 chiffres dont l'écriture en base dix est $m\ c\ d\ u$ ce qui signifie qu'il se décompose en :

$$m \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 + u$$

Les trois premiers termes sont divisibles par 2 car :

$$m \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 = 2 \times (m \times 500 + c \times 50 + d \times 5)$$

Donc le nombre est divisible par 2 si et seulement si le chiffre de ses unités u l'est aussi, c'est-à-dire que u est pair.

Divisibilité par 4 :

Un nombre entier naturel est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par son chiffre des dizaines et son chiffre des unités est divisible par 4.

Preuve : Reprenons la décomposition précédente d'un nombre à 4 chiffres :

$$m \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 + u$$

soit encore :

$$m \times 1000 + c \times 100 + du$$

Les deux premiers termes sont divisibles par 4 car :

$$m \times 1000 + c \times 100 = 4 \times (m \times 250 + c \times 25)$$

Donc le nombre est divisible par 4 si et seulement si nombre du l'est aussi.

Divisibilité par 5 :

Un nombre entier naturel est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.

Preuve : Reprenons la décomposition précédente d'un nombre à 4 chiffres :

$$m \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 + u$$

Les trois premiers termes sont divisibles par 5 car :

$$m \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 = 5 \times (m \times 200 + c \times 20 + d \times 2)$$

Donc le nombre est divisible par 5 si et seulement si le chiffre de ses unités u l'est aussi, c'est-à-dire est 0 ou 5.

<u>Divisibilité par 3 :</u>

Un nombre entier naturel est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3

<u>Preuve</u> : Reprenons la décomposition précédente d'un nombre à 4 chiffres :

$$m \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 + u$$

Elle peut se réécrire :

$$m \times 999 + c \times 99 + d \times 9 + m + c + d + u$$

Les trois premiers termes sont divisibles par 3 car :

$$m \times 999 + c \times 99 + d \times 9 = 3 \times (m \times 333 + c \times 33 + d \times 3)$$

Donc le nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres $m + c + d + u$ l'est aussi.

<u>Divisibilité par 9 :</u>

Un nombre entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9

<u>Preuve</u> : Reprenons la décomposition précédente d'un nombre à 4 chiffres :

$$m \times 999 + c \times 99 + d \times 9 + m + c + d + u$$

Les trois premiers termes sont divisibles par 9 car :

$$m \times 999 + c \times 99 + d \times 9 = 9 \times (m \times 111 + c \times 11 + d \times 1)$$

Donc le nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres $m + c + d + u$ l'est aussi.

<u>Exemples :</u>

Nombres	Par 2	Par 3	Par 4	Par 5	Par 9
555		x		x	
12207		x			
324	x	x	x		x
111222	x	x			x
740	x		x	x	

91					