#### Intégration

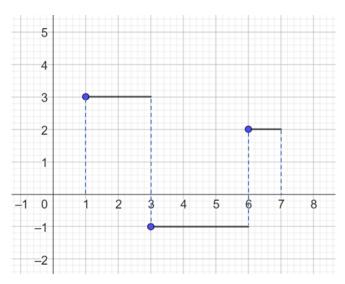
# I Approche du concept avec des fonctions en escalier.

Considérons une fonction f définie sur un intervalle fermé borné [a,b] et constante par intervalles c'est à dire pour laquelle il existe une suite finie strictement croissante de nombres  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ , appelée subdivision de [a,b] pour laquelle f a une valeur constante  $c_i$  sur chaque sous intervalle  $]x_i, x_{i+1}[$  de la subdivision.

Alors, on appelle **intégrale de cette fonction** sur l'intervalle [a, b] la quantité :

$$I_{[a,b]}(f) = c_0 (x_1 - x_0) + c_1 (x_2 - x_1) + \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-1})$$

**Exemple**: Soit la fonction en escalier suivante:



La subdivision est:

$$x_0 = 1 < x_1 = 3 < x_2 = 6 < x_3 = 7$$

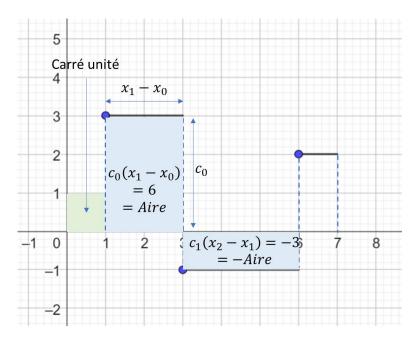
et les valeurs constantes :

$$c_0 = 3$$
;  $c_1 = -1$ ;  $c_2 = 2$ 

L'intégrale sur l'intervalle [1,7] est alors :

$$I_{[1,7]}(f) = 3 \times (3-1) + (-1) \times (6-3) + 2 \times (7-6) = 6 + (-3) + 2 = 5$$

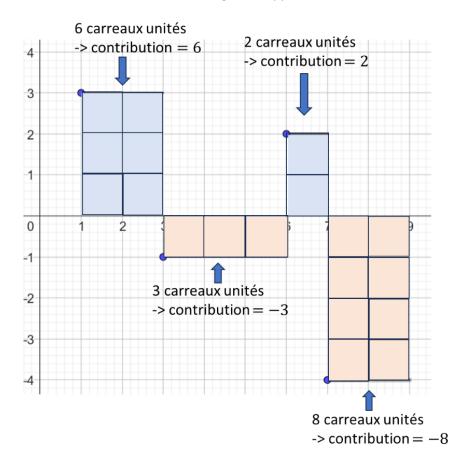
A noter qu'en considérant un carré unité formé sur un segment unité horizontal et un segment unité vertical, chacune des contributions  $c_i$   $(x_{i+1}-x_i)$  s'interprète comme l'aire d'un rectangle affectée d'un signe moins si  $c_i$  a une valeur négative.



Le calcul d'une telle intégrale peut alors se faire graphiquement en additionnant les aires de surfaces rectangulaires précédées du signe moins si ces rectangles sont sous l'axe des abscisse.

# Exemple 2:

Voici comment faire un calcul intégral graphiquement, les rectangles de contribution positive apparaissant en bleu et ceux de contribution négatives apparaissant en rose.



# II Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle [a, b].

Approche du concept par un exemple :

Considérons la fonction carrée f sur l'intervalle [0,1] et créons une subdivision de cette intervalle en 5 parties égales, c'est-à-dire :

$$x_0 = 0 < x_1 = 0.2 < x_2 = 0.4 < x_3 = 0.6 < x_4 = 0.8 < x_5 = 1$$

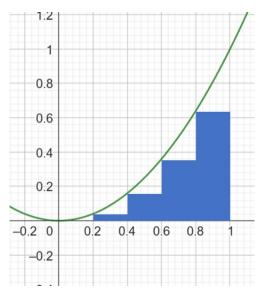
Définissons alors une fonction en escalier  $\varphi$  par  $f(x_i)$   $sur[x_i, x_{i+1}]$  et  $\varphi(x_5) = f(x_5)$ . Les valeurs constantes prises par cette fonction sont ainsi :

$$c_0 = 0^2$$
;  $c_1 = 0.2^2$ ;  $c_2 = 0.4^2$ ;  $c_3 = 0.6^2$ ;  $c_4 = 0.8^2$ 

L'intégrale de la fonction en escalier est donc sur [0,1]:

$$I_{[0,1]}(\varphi) = 0^2 \times 0.2 + 0.2^2 \times 0.2 + 0.4^2 \times 0.2 + 0.6^2 \times 0.2 + 0.8^2 \times 0.2$$
$$= 0.2 \times (0 + 0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.81) = 0.274$$

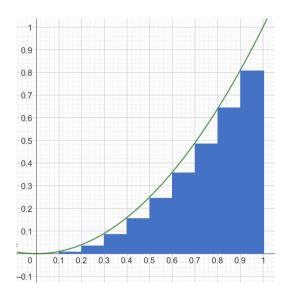
Cette intégrale représente l'aire en bleue sur la figure en unité d'aire du repère.



Si nous créons maintenant une fonction en escalier  $\psi$  de la même manière mais avec une subdivision plus fine en 10 parties égales de [0,1] nous obtenons l'intégrale suivante :

$$I_{[0,1]}(\psi) = 0^2 \times 0.1 + 0.1^2 \times 0.1 + 0.2^2 \times 0.1 + 0.3^2 \times 0.1 \dots + 0.9^2 \times 0.1$$
$$= 0.1 \times (0^2 + 0.1^2 + 0.2^2 + \dots + 0.9^2) = 0.285$$

Elle est illustrée en bleue ci-dessous :



On conçoit alors aisément par la pensée que si on crée une suite de fonctions en escalier  $\varphi_n$  par ce procédé avec une subdivision de l'intervalle [0,1] en un nombre entier n de parties égales, alors plus n sera grand et plus l'aire en bleue se rapprochera d'une valeur fixe qui est l'aire délimitée par la courbe de la fonction carrée, l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation x=1.

Or, pour une subdivision de [0,1] en n parties égales, on définit le **pas de subdivision** comme étant :

$$\Delta x = (x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n}$$

La subdivision est donc :

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \dots < x_{n-1} = \frac{n-1}{n} < x_n = 1$$

Et l'intégrale :

$$I_{[a,b]}(\varphi_n) = f(x_0) \times \Delta x + f(x_1) \times \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \times \Delta x$$

$$= \frac{1}{n} \left( 0^2 + \left( \frac{1}{n} \right)^2 + \left( \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3}$$

On peut montrer mathématiquement que cette suite a pour limite  $\frac{1}{3}$  mais ce ne sera pas le propos ici d'autant que nous verrons une méthode plus simple utilisant une primitive de la fonction carrée pour calculer cette valeur limite.

Notons plutôt qu'en utilisant le symbole sigma pour les sommes, nous pouvons écrire :

$$I_{[a,b]}(\varphi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \, \Delta x$$

Cela justifie alors cette notation pour la valeur limite de cette suite d'intégrales quand n tend vers l'infini :

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \, \Delta x$$

Cette quantité est appelée intégrale de f de la borne 0 à la borne 1, on dira qu'on intègre à bornes croissantes.

On définira l'intégrale de la borne 1 à la borne 0, donc à bornes décroissantes par :

$$\int_1^0 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx$$

# Théorème général:

Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé borné [a,b] et si on crée une subdivision de cet intervalle  $x_0=a< x_1< x_2< \cdots .< x_n=b$  en n parties égales alors l'intégrale de a à b de f est définie par :

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) (x_{i+1} - x_i)$$

Et on pose par définition que :

$$\int_{b}^{a} f(x) dx = -\int_{a}^{b} f(x) dx =$$

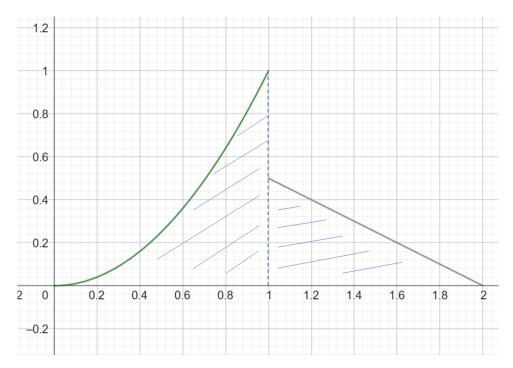
### II Intégrale d'une fonction continue par morçeaux sur un intervalle [a, b].

Une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé borné [a,b] est une fonction pour laquelle il existe une subdivision de [a,b] telle que cette fonction soit continue sur chaque sous intervalle ouvert de cette subdivision en ayant une limite aux bornes de ce sous intervalle.

#### Un exemple:

Considérons la fonction *f* définie par :

$$f(x) = x^2$$
 sur [0; 1[  
 $f(x) = 1 - 0.5 x$  sur [1; 2]



Alors l'intégrale de 0 à 2 visant à représenter l'aire hachurée est donc naturellement définie par une relation dite relation de Chasles par :

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$$

L'aire d'un triangle étant le produit d'une base par la hauteur associée le tout divisé par 2, on a :

$$\int_{1}^{2} f(x)dx = \frac{1 \times 0.5}{2} = \frac{1}{4}$$

Et si on admet pour l'instant :

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$$

on en déduit :

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

### III Propriétés de l'intégrale

Dans la suite les fonctions considérées seront considérées comme continues ou continues par morceaux sur un même intervalle fermé borné [a,b], et  $\lambda$  et  $\mu$  seront considérées comme deux réels quelconques.

# Linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

Comparaison de l'intégrale :

Si  $f \leq g$  alors :

$$\int_a^b f(x) \ dx \le \int_a^b g(x) \ dx$$

#### **Relation de Chasles:**

Si  $x_1, x_2, x_3$  sont trois réels de l'intervalle [a, b] alors :

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x) \ dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \ dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) \ dx$$

Cette relation rappelle celle du même nom sur les vecteurs :

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3}$$

La relation de Chasles tient au caractère algébrique de l'intégrale, par le fait que f(x) peut être positif ou négatif mais aussi par le fait que dx peut être positif ou négatif selon que l'on intègre à bornes croissantes ou à bornes décroissante. Ci-dessous les différents signes possibles des contributions élémentaires f(x) dx

$$f(x) > 0$$

$$dx > 0$$

$$f(x) dx < 0$$

$$dx < 0$$

$$f(x) dx < 0$$

$$f(x) dx < 0$$

$$f(x) dx < 0$$

#### IV Intérêt de l'intégrale pour construire une primitive

Certaines fonctions de référence n'ont pas de primitive qui s'exprime simplement à l'aide des fonctions de référence, comme par exemple la fonction inverse sur  $]0,+\infty[$ . Voyons sur ce dernier exemple comment construire une primitive à l'aide d'une intégrale :

Considérons pour  $x \in ]0, +\infty[$  la fonction :

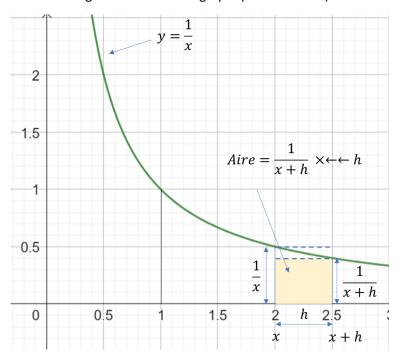
$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt$$

Pour  $x \in ]0, +\infty[$  elle est strictement positive et pour  $x \in ]0,1[$  strictement négative et elle s'annule en 0. On voit également graphiquement qu'elle est strictement croissante.

Soit alors h > 0 tel que  $x + h \in ]0, +\infty[$  alors on voit par la relation de Chasles que :

$$F(x+h) - F(x) = \int_{1}^{x+h} \frac{1}{t} dt - \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt = \int_{x}^{x+h} \frac{1}{t} dt$$

On voir de plus graphiquement que l'on peut encadrer l'aire associée par l'aire de deux rectangles (le rectangle d'aire inférieure est figuré en rose sur le graphique ci-dessous).



Ainsi:

$$\frac{1}{x+h} h < \int_{x}^{x+h} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{x} h$$

soit

$$\frac{1}{x+h} h < F(x+h) - F(x) < \frac{1}{x} h$$

Et en divisant par h:

$$\frac{1}{x+h} < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < \frac{1}{x}$$

En fixant x et en faisant tendre h vers 0 on voit que  $\frac{1}{x+h}$  tend vers  $\frac{1}{x}$  et donc par l'encadrement que  $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$  tend également vers  $\frac{1}{x}$ . On peut montrer la même chose avec h<0. Donc F est dérivable sur  $]0,+\infty[$  et

$$F'(x) = \frac{1}{x}$$

F est donc une primitive de la fonction inverse sur  $]0,+\infty[$ . On l'appelle logarithme népérien et on la note Ln. Ainsi :

$$Ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

**Remarque**: On peut prouver que cette fonction est la réciproque de la fonction exponentielle. En effet, considérons la fonction composée  $g(x) = F(e^x)$  où F est la fonction définie ci-dessus par une intégrale. Alors en dérivant sur  $\mathbb{R}$ , on obtient :

$$g'(x) = F'(e^x) e^x = \frac{1}{e^x} e^x = 1$$

Donc, il existe une constante c telle que pour tout réel x::

$$g(x) = x + c$$

Or:

$$g(0) = F(e^0) = F(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$$

Donc la constante c vaut 0 et g(x) = x. Ainsi :

$$F(e^x) = x$$

F est donc la réciproque de l'exponentielle.

## Autre exemple:

La fonction  $f(x) = e^{-x^2}$  n'a pas de primitive s'exprimant à l'aide des fonctions de référence. On construit donc une primitive par calcul intégral en posant :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Nous verrons qu'on peut généraliser le concept d'intégrale à des intervalles non bornés. On peut alors prendre comme autre primitive :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$$

Nous aurons usage de ce genre de primitive en étudiant les variables aléatoires à densité.

# Théorème général:

Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé borné [a,b] et c une valeur quelconque de [a,b] alors une primitive de f sur [a,b] est la fonction définie par :

$$F(x) = \int_{c}^{x} f(t) dt$$

# IV Intérêt de la connaissance d'une primitive pour le calcul d'une intégrale

Si on sait exprimer une primitive d'une fonction à partir des fonctions de référence, alors ce théorème est très utile pour calculer une intégrale de cette fonction :

# Théorème général:

Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé borné [a,b] et F est une primitive de f sur [a,b] alors :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) \quad noté \ [F(x)]_{a}^{b} \ et \ appelé \ crochet \ de \ variation$$

#### Preuve:

Considérons la fonction :

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Nous avons vu précédemment que  $F_1$  était une primitive de f sur [a,b] donc sur ce dernier intervalle on a :  $F_1' = F'$  et donc  $F_1$  et F diffèrent d'une constante  $F_1$  et  $F_2$  diffèrent d'une constante  $F_3$  et  $F_4$  et donc  $F_4$  et  $F_4$  diffèrent d'une constante  $F_4$  et  $F_4$  et donc  $F_4$  et  $F_4$  diffèrent d'une constante  $F_4$  et  $F_4$  et donc  $F_4$  et donc  $F_4$  et donc  $F_4$  et  $F_4$  et donc  $F_4$  et donc  $F_4$  et donc  $F_4$  et  $F_4$  et donc  $F_4$  et

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt + c$$

Or:

$$F(a) = \int_{a}^{a} f(t)dt + c = c$$

Et:

$$F(b) = \int_{a}^{b} f(t)dt + c$$

Donc:

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = F(b) - c = F(b) - F(a)$$

# Exemple:

Revenons sur le calcul de l'intégrale de la fonction carrée sur [0;1]:

Une primitive de  $f(x) = x^2$  étant la fonction  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  nous avons :

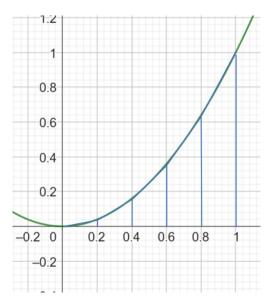
$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

# VI Méthode de calcul approché d'une intégrale par la méthode des trapèzes

Quand on ne peut exprimer simplement une primitive d'une fonction, le calcul intégral de cette dernière ne peut plus se faire de façon exacte mais de façon approchée. Nous avons abordé en début de chapitre la méthode consistant à approcher la fonction à intégrer par une fonction en escalier, mais cette méthode n'est pas très performante, comme on le voit dans l'exemple pris avec la fonction carrée à intégrer sur [0;1]

Toujours avec cette exemple, il est plus judicieux d'approcher la fonction à intégrer par une fonction affine par morceaux et d'intégrer cette fonction. C'est la méthode des trapèzes.

On rappelle que l'aire d'un trapèze est égale à la somme de la grande base et de la petite base le tout fois la hauteur et divisé par deux.



Le premier trapèze a pour aire :

$$\frac{(f(0) + f(0,2)) \times 0,2}{2}$$

Le second:

$$\frac{(f(0,2) + f(0,4)) \times 0,2}{2}$$

Le troisième :

$$\frac{(f(0,4) + f(0,6)) \times 0,2}{2}$$

Le quatrième :

$$\frac{(f(0,6) + f(0,8)) \times 0,2}{2}$$

Le cinquième :

$$\frac{(f(0,8) + f(1)) \times 0,2}{2}$$

En sommant ces cinq aires et en factorisant, on obtient une formule simple :

$$\left(\frac{f(0)}{2} + f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8) + \frac{f(1)}{2}\right) \times 0,2$$

Soit:

$$(0 + 0.2^2 + 0.4^2 + 0.6^2 + 0.8^2 + 0.5) \times 0.2$$

ce qui donne la valeur 0,34 qui est bien plus proche de la valeur exacte  $\frac{1}{3}=0$ ,333 ... que ne l'était celle obtenue pour la même subdivision à pas de 0,2 avec une fonction en escalier.