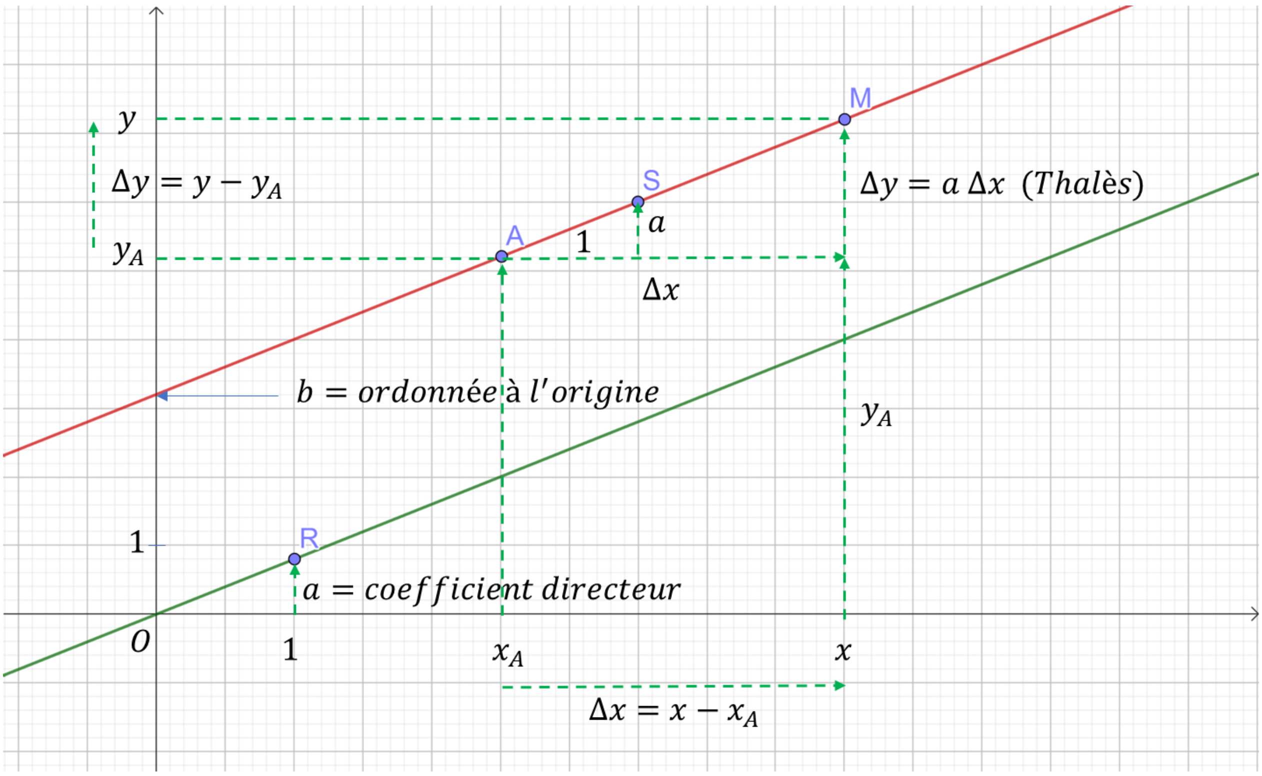
Equation de droite en repère orthogonal

1) Cas général

Dans un plan muni d'un repère orthogonal, on considère une droite non verticale (en rouge sur le schéma)



On trace sa parallèle passant par l'origine O du repère (en vert sur le schéma)

On définit alors le coefficient directeur a comme étant l'ordonnée du point R de cette droite ayant pour abscisse 1.

Si on se donne deux points distincts A et M sur la droite rouge et si on note $\Delta x = x - x_A$ la différence d'abscisse entre A et M et $\Delta y = y - y_A$ la différence d'ordonnée, alors, le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{\Delta y}{a} = \frac{\Delta x}{1}$$

Soit, en faisant un produit en croix :

$$\Delta y = a\,\Delta x$$

$$y - y_A = a\,(x - x_A)$$

Cette relation permet d'obtenir le coefficient directeur de la droite si on connait les coordonnées de deux points distincts $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ en prenant pour M le point B :

$$\boldsymbol{a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Elle permet également d'obtenir l'équation réduite relative au point A :

$$\boldsymbol{y = a\,(x - x_A) + y_A}$$

Et en développant l'expression de droite :

$$y = a\,x + y_A - a\,x_A$$

Ce qui donne l'équation réduite (relative au point origine O) :

$$\boldsymbol{y = a\,x + b \quad avec\ \ b = y_A - a\,x_A}$$

b est appelé **ordonnée à l'origine**.

<u>Exemple</u> :

Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $A\left(2, \frac{1}{3}\right), B(5, -4)$

Réponse :

On commence par calculer le coefficient directeur :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 - \frac{1}{3}}{5 - 2} = \frac{-4 - \frac{1}{3}}{3} = \frac{3 \times \left(-4 - \frac{1}{3}\right)}{3 \times 3} = -\frac{13}{9}$$

On calcule ensuite l'ordonnée à l'origine :

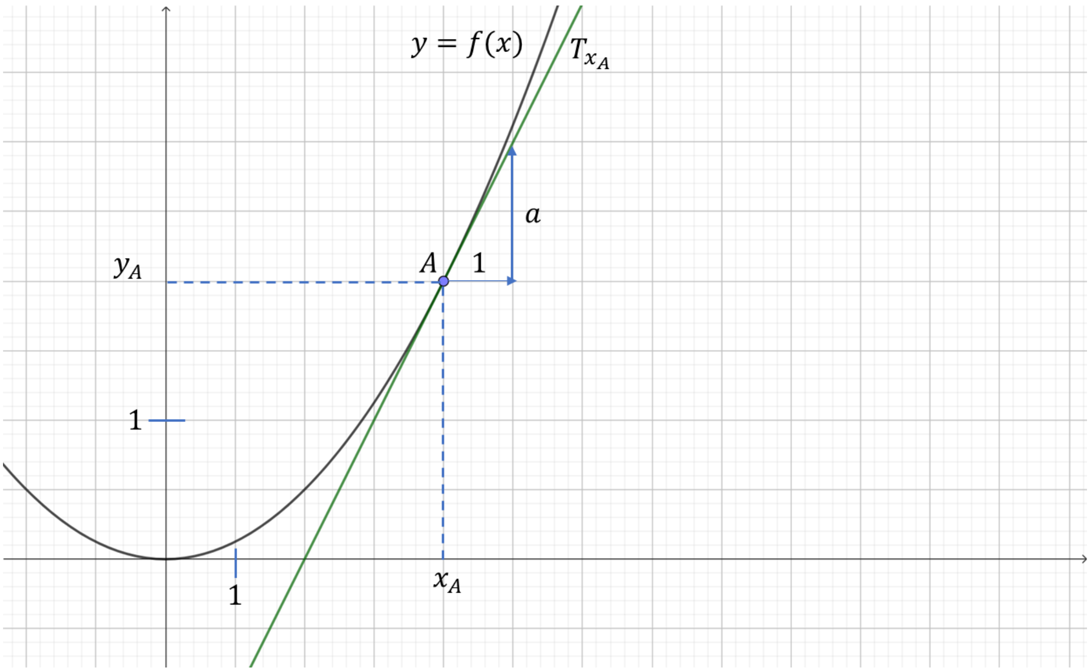
$$b = y_A - a\,x_A = \frac{1}{3} - \left(-\frac{13}{9}\right) \times 2 = \frac{3}{9} + \frac{26}{9} = \frac{29}{9}$$

On en déduit l'équation réduite :

$$y = -\frac{13}{9}\,x + \frac{29}{9}$$

<u>2) Cas particulier de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction</u>

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I et dont la courbe est représentée dans un repère orthogonal avec pour équation donc $y = f(x)$.



En un point A de la courbe on peut donc poser une tangente dont le coefficient directeur a est le nombre dérivé de f à l'abscisse x_A de ce point. Ainsi :

$$\boxed{a = f'(x_A)}$$

De plus, l'ordonnée de ce point est :

$$\boxed{y_A = f(x_A)}$$

Ainsi, l'équation de la tangente s'écrit :

$$y = a\,(x - x_A) + y_A$$

Soit :

$$\boxed{\boldsymbol{y = f'(x_A)\,(x - x_A) + f(x_A)}}$$

<u>Exemple</u> :

Déterminer l'équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point A d'abscisse 1.

Réponse :

On introduit la fonction associée :

$$f(x) = x^2$$

qui est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$f'(x) = 2\,x$$

A a pour coordonnées :

$$x_A = 1,\ \ y_A = f(1) = 1$$

et la tangente a pour coefficient directeur :

$$a = f'(1) = 2$$

La tangente a pour équation :

$$y = f'(1)\,(x - 1) + f(1)$$

soit :

$$y = 2\,(x - 1) + 1$$

et en développant, on obtient l'équation réduite :

$$y = 2\,x - 1$$