Dérivation

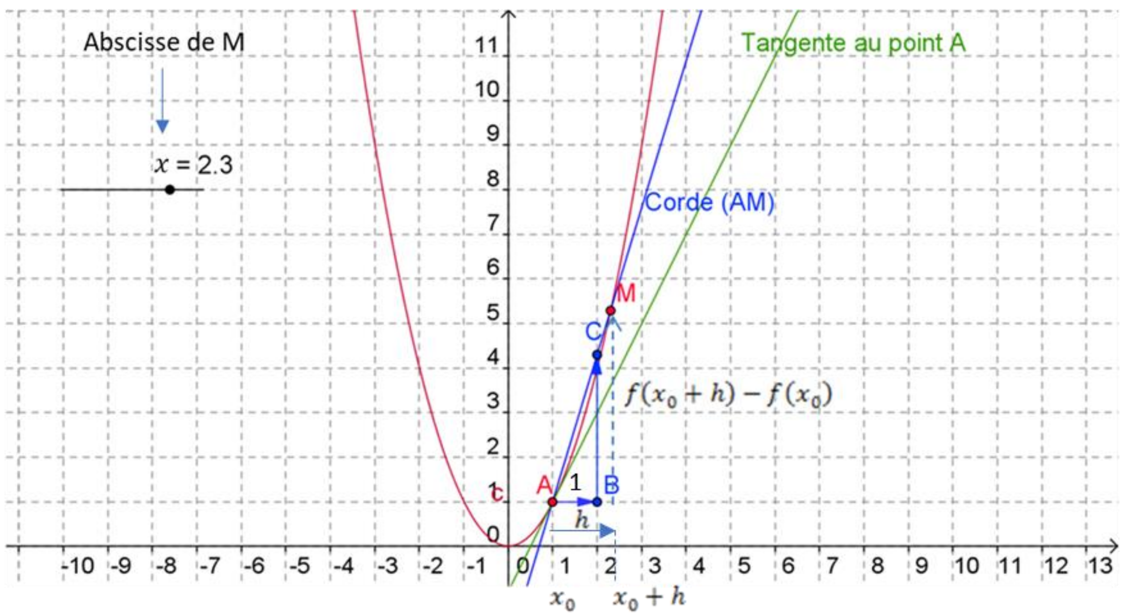
1) Approche graphique du concept sur un exemple :

Considérons un point A de la représentation graphique de la fonction carrée $f : x \to x^2$. Notons son abscisse x_0 et considérons un autre point M de la courbe d'abscisse $x = x_0 + h$ distinct de A ce qui revient à dire que h est non nul . La droite (AM) a alors un coefficient directeur représenté sur la figure ci-dessous par la différence entre l'ordonnée du point C et celle du point B. Ce coefficient directeur n'est autre que le taux d'accroissement de la fonction entre les abscisses x_0 et $x_0 + h$:

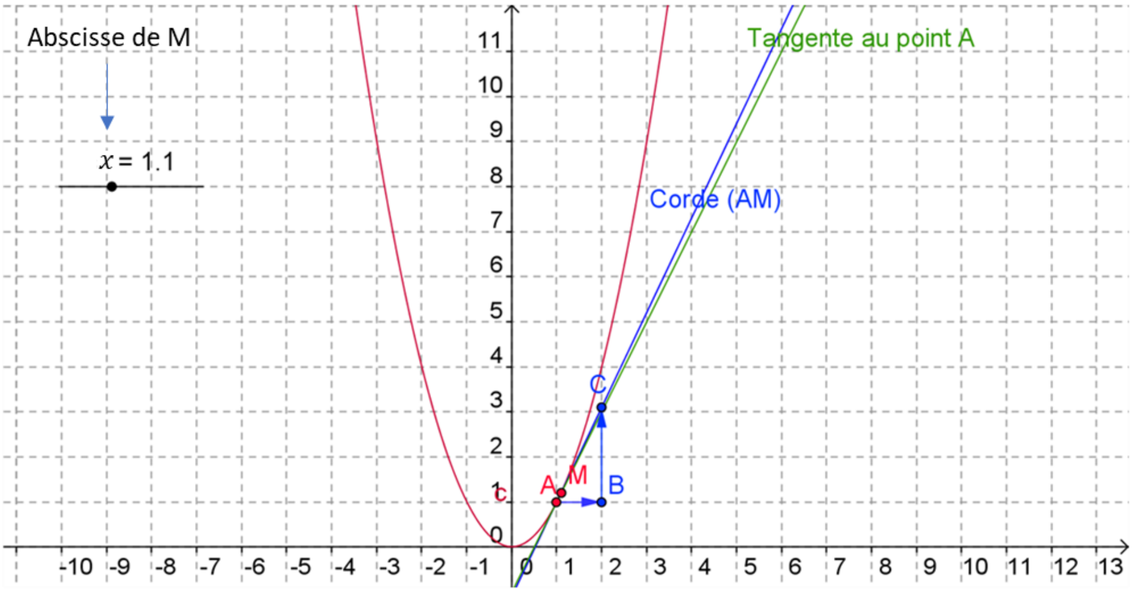
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Or, si on fait tendre le point M vers le point A, ce qui revient à faire tendre h vers 0, un logiciel graphique comme geogebra par exemple, montre que la corde se rapproche jusqu'à pratiquement se confondre, d'une droite oblique appelée tangente à la courbe au point A. Le coefficient directeur de cette droite « limite » n'est donc que le nombre dérivé de f en x_0

Voilà ce que cela donne pour $x_0 = 1$ et $h = x - x_0 = 2{,}3 - 1 = 1{,}3$



Et pour une valeur de $h = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$ plus petite, on ne peut pratiquement plus distinguer à l'œil coefficient directeur de corde et coefficient directeur de tangente.

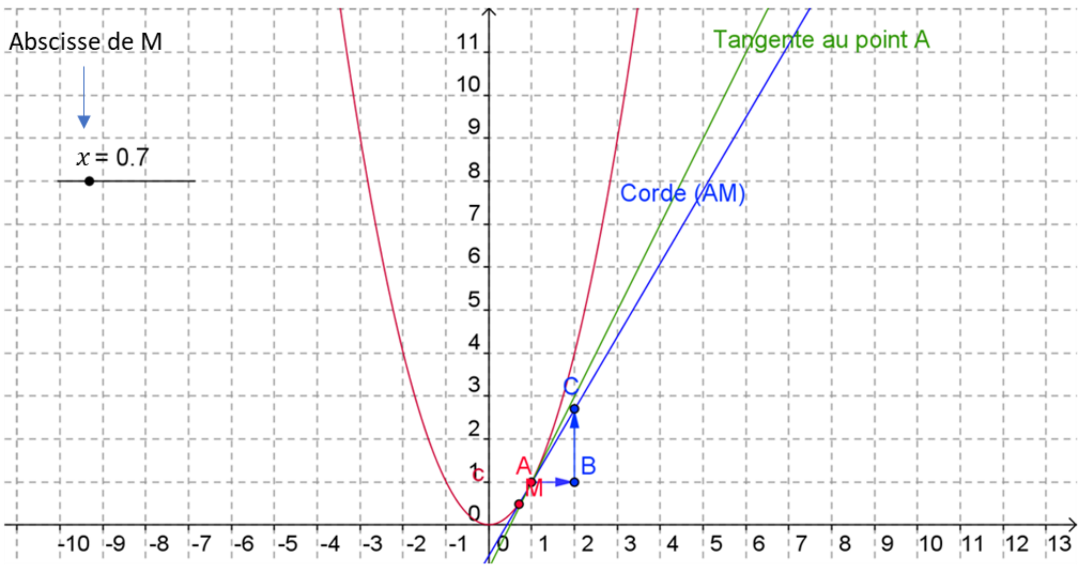


Dans les deux exemples présentés, l'abscisse du point M est plus grande que celle de A. Ce que l'on voit en la faisant tendre par valeur supérieure vers 1 se traduit par la définition du nombre dérivé à droite de f en 1 :

$$f_d'(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Ce nombre est appelé **nombre dérivé à droite de la fonction f** à l'abscisse 1 et s'interprète géométriquement comme le **coefficient directeur de la demi tangente** à droite à la courbe au point A (demi droite $[A, C)$ sur les graphiques précédents).

Or , l'abscisse du point M peut être également prise inférieure à celle de A comme sur ce graphique où $h = 0{,}7 - 1 = -0{,}3$:



Un phénomène analogue s'observe et conduit à définir un **nombre dérivé à gauche de la fonction f** à l'abscisse 1 qui s'interprète géométriquement comme le **coefficient directeur de la demi tangente** à gauche à la courbe au point A :

$$f_g'(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Or ces deux nombres dérivés à droite et à gauche ont la même valeur. On dit alors que la fonction est dérivable en 1 (les deux demi tangentes forment par union une tangente) et on écrit plus simplement :

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Sur le graphique ce nombre peut être mesuré comme étant la valeur algébrique $\overline{BC'} = y_{C'} - y_B = 3 - 1 = 2,$ $où$ C' est le point de la tangente de même abscisse que le point C. Ainsi, graphiquement on obtient :

$$f'(1) = 2$$

<u>2) Approche du concept par le calcul sur un exemple :</u>

Reprenons l'exemple de la fonction carrée et transformons le taux d'accroissement de f entre l'abscisse 1 et l'abscisse $x = 1 + h$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{[(1+h) - 1]\,[(1+h) + 1]}{h}$$

$$= \frac{h\,(2+h)}{h} = 2 + h$$

En faisant tendre h vers 0, on retrouve par le calcul que ce taux d'accroissement tend vers 2. On écrit pour cela :

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} 2 + h = 2$$

Le calcul fait à l'abscisse 1 peut se faire à n'importe quelle abscisse x_0, en notant :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - {x_0}^2}{h} = \frac{[(x_0 + h) - x_0]\,[(x_0 + h) + x_0]}{h}$$

$$= \frac{h\,(2\,x_0 + h)}{h} = 2\,x_0 + h$$

Ce qui conduit à

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} 2\,x_0 + h = 2\,x_0$$

On dit alors que la fonction carrée est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$ et on peut donc ainsi définir sa fonction dérivée :

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x\ fixé}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2\,x}}$$

On précisera également le domaine où ce nombre dérivé existe en écrivant :

$$\boxed{\boldsymbol{D_{f'}} = \mathbb{R}}$$

Une autre écriture très employée en mathématique est l'écriture « différentielle » où on note :

$$df = f(x+h) - f(x)$$

ce qui signifie différence « infinitésimale » (il faut penser pouvant être rendue infiniment petite) de valeurs de f entre deux abscisses et :

$$dx = (x+h) - x = h$$

D'où l'autre notation, retrouvée en calcul intégral :

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \frac{df}{dx}}}$$

3) Fonction dérivée des fonctions de référence :

Les propriétés algébriques des fonctions de référence conduisent aux résultats suivants :

Fonction f	D_f	Fonction dérivée f'	$D_{f'}$
$constante$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2\,x$	$\mathbb{R}$
x^3	$\mathbb{R}$	$3\,x^2$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$sin(x)$	$\mathbb{R}$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$Ln(x)$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$

Remarque : pour aller plus loin, on peut noter une formule qui permet de retrouver rapidement les 5 premières :

$\boldsymbol{x^a}$	$\mathbb{R}$ $\boldsymbol{ou}$ $[\boldsymbol{0},+\infty[$	$\boldsymbol{a\,x^{a-1}}$	$\mathbb{R}$ $\boldsymbol{ou}$ $]\boldsymbol{0},+\infty[$

où a est un réel quelconque non nul.

En effet :

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = x^{0,5}$$

4) Propriétés de la dérivation

<u>Somme, différence</u> :

Si deux fonctions u et v sont dérivables en un point a alors la fonction somme $f = u + v$ est dérivable en a et :

$$\boldsymbol{f'(a) = u'(a) + v'(a)}$$

La fonction différence $g = u - v$ est dérivable en a et :

$$\boldsymbol{g'(a) = u'(a) - v'(a)}$$

Exemple : $u(x) = \sqrt{x},\ v(x) = x^2 + 1,\ f(x) = \sqrt{x} + x^2 + 1$

u est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ mais dérivable seulement en tout point a de $]0, +\infty[$ et :

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

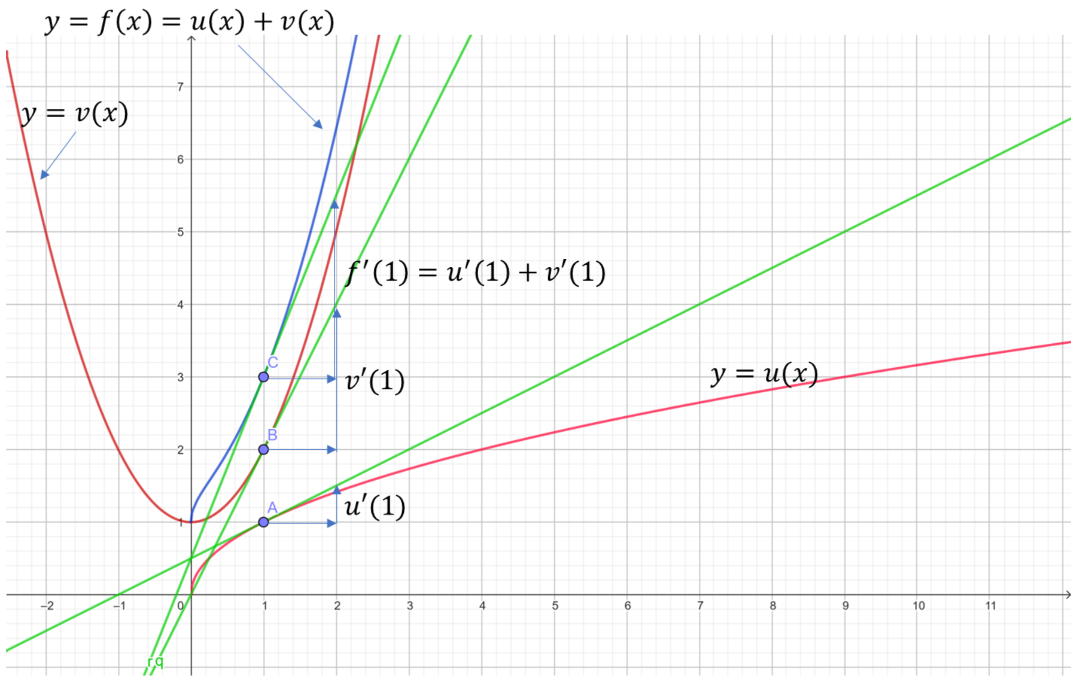
u est définie et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et :

$$v'(x) = 2\,x$$

On en déduit que f est dérivable en tout point de $]0, +\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\,x$$

Ceci s'illustre sur le graphique en $x = 1$ par le fait que le coefficient directeur $f'(1)$ de la tangente en C à la courbe de f est la somme des coefficients directeurs $u'(1)$ et $v'(1)$ des tangentes en A à la courbe de u et en B à la courbe de v.



<u>Produit par une constante</u> :

Si une fonction u est dérivable en un point a et si c est un nombre réel constant alors la fonction produit $f = c\,u$ est dérivable en a et :

$$\boldsymbol{f'(a) = c\,u'(a)}$$

De même, si c n'est pas nulle, la fonction quotient $g = \frac{u}{c}$ est dérivable en a et :

$$g'(a) = \frac{u'(a)}{c}$$

Exemple : $u(x) = sin(x)\,, c = 3,\ f(x) = 3\ sin(x)$

u est définie et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et :

$$u'(x) = cos(x)$$

On en déduit que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 3\ cos(x)$$

Produit :

Si deux fonctions u et v sont dérivables en un point a alors la fonction produit $f = u\,v$ est dérivable en a et :

$$f'(a) = u'(a)\ v(a) + u(a)\,v'(a)$$

Exemple : $u(x) = x^2, v(x) = e^x,\ f(x) = x^2 e^x$

u et v sont définies et dérivables en tout point de $\mathbb{R}$ et :

$$u'(x) = 2\,x,\ \ v'(x) = e^x$$

On en déduit que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 2\,x\,e^x + x^2\,e^x = (x^2 + 2\,x)\,e^x$$

Quotient :

Si deux fonctions u et v sont dérivables en un point a et $v(a)$ non nul, alors la fonction quotient $f = \frac{u}{v}$ est dérivable en a et :

$$f'(a) = \frac{u'(a)\ v(a) - v'(a)\ u(a)}{(v(a))^2}$$

Exemple : $u(x) = x^2 + 1, v(x) = x - 2,\ f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$

u et v sont définies et dérivables en tout point de $\mathbb{R}$ privé de 2 et :

$$u'(x) = 2\,x,\ \ v'(x) = 1$$

On en déduit que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ privé de 2 et :

$$f'(x) = \frac{2\,x\,(x-2) - 1\,(x^2+1)}{(x-2)^2} = \frac{2\,x^2 - 4\,x - x^2 - 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4\,x - 1}{(x-2)^2}$$

Composée :

Si une fonction u est dérivable en un point a et si une fonction f est dérivable au point $u(a)$ alors la fonction composée $g = f \circ u$ est dérivable en a et :

$$\boldsymbol{g'(a) = f'(u(a))\ u'(a)}$$

Exemple : $u(x) = 2\,x + 1,\ f(x) = e^x,\ g(x) = f(u(x)) = e^{2\,x+1}$

u et f sont définies et dérivables en tout point de $\mathbb{R}$ et :

$$u'(x) = 2,\ \ f'(x) = e^x$$

On en déduit que g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = 2\ e^{2\,x+1}$$

Cette propriété permet d'obtenir les dérivées des composées des fonctions de référence avec une fonction u dérivable sur un intervalle I et prenant toutes ses valeurs dans le domaine de dérivabilité de la fonction de référence que l'on compose avec. Cela donne ce tableau :

Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$\boldsymbol{u(x)^2}$	$\boldsymbol{2\,u(x)\,u'(x)}$
$\boldsymbol{u(x)^3}$	$\boldsymbol{3\,u(x)^2\,u'(x)}$
$\boldsymbol{\frac{1}{u(x)}}$	$\boldsymbol{-\frac{u'(x)}{u(x)^2}}$
$\boldsymbol{\sqrt{u(x)}}$	$\boldsymbol{\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$
$\boldsymbol{sin(u(x))}$	$\boldsymbol{u'(x)\,cos(u(x))}$
$\boldsymbol{cos(u(x))}$	$\boldsymbol{-u'(x)\,sin(u(x))}$
$\boldsymbol{e^{u(x)}}$	$\boldsymbol{u'(x)\,e^{u(x)}}$
$\boldsymbol{Ln(u(x))}$	$\boldsymbol{\frac{u'(x)}{u(x)}}$

Remarque : pour aller plus loin, on peut noter une formule qui permet de retrouver rapidement les 4 premières :

$\boldsymbol{u(x)^a}$	$\boldsymbol{a\,u(x)^{a-1}\,u'(x)}$

où a est un réel quelconque non nul.

Exemple :

$$f(x) = Ln(x^2 + 3\,x + 1)$$

On pose :

$$u(x) = x^2 + 3\,x + 1$$

On calcule :

$$u'(x) = 2\,x + 3$$

On en déduit :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2\,x + 3}{x^2 + 3\,x + 1}$$

5) Equation de la tangente en un point de la courbe d'une fonction

Soit une fonction dérivable en un point A d'abscisse x_A et d'ordonnée $y_A = f(x_A)$. Sa courbe représentative dans un repère orthogonal admet en ce point une tangente T_A d'équation :

$$y = a\,(x - x_A) + y_A$$

où a est le coefficient directeur de cette tangente qui est par définition $f'(x_A)$.

L'équation de cette tangente est donc :

$$\boxed{\boldsymbol{y = f'(x_A)\,(x - x_A) + f(x_A)}}$$

Exemple :

Donner l'équation de la tangente à la courbe de la fonction précédente définie par $f(x) = Ln(x^2 + 3\,x + 1)$ au point A d'abscisse 2.

On calcule la fonction dérivée :

$$f'(x) = \frac{2\,x + 3}{x^2 + 3\,x + 1}$$

Et on l'évalue en $x = 2$:

$$f'(2) = \frac{2\ \times 2 + 3}{2^2 + 3\ \times 2 + 1} = \frac{7}{11}$$

On évalue f en $x = 2$:

$$f(2) = Ln(2^2 + 3\ \times 2 + 1) = Ln(11)$$

On écrit l'équation réduite de la tangente en $x = 2$:

$$y = f'(2)\,(x - 2) + f(2)$$

On remplace par les valeurs calculées :

$$y = \frac{7}{11}\,(x - 2) + Ln(11)$$

On développe :

$$y = \frac{7}{11}\,x - \frac{14}{11} + Ln(11)$$

On obtient ainsi la forme réduite $y = a\,x + b$ où :

$$a = \frac{7}{11},\ \ b = -\frac{14}{11} + Ln(11)$$

En pratique, on peut donner des valeurs approchées avec un nombre réduit de chiffres significatifs (par exemple 2) en utilisant une calculette :

$$a \approx 0{,}64,\ \ b \approx 1{,}1$$

Ce qui donnera pour l'équation réduite approchée :

$$y = 0{,}64\,x -\ 1{,}1$$

La fonction qui lui correspond à savoir : $g(x) = 0,64\,x - \ 1,1$ est appelée **approximation affine de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x = 2}$**.