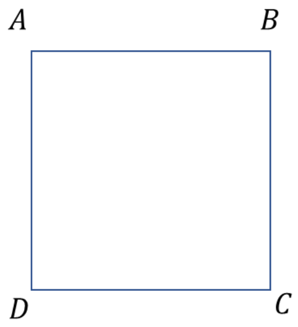
# *Le nombre d'or*

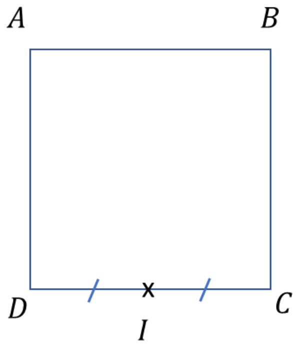
## 1) Le rectangle d'or :

Un rectangle d'or est un rectangle obtenu par la construction suivante :

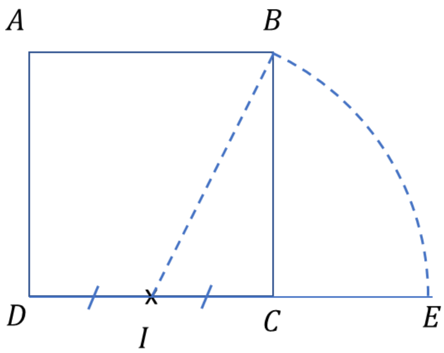
a) On commence par dessiner un carré de côté quelconque.



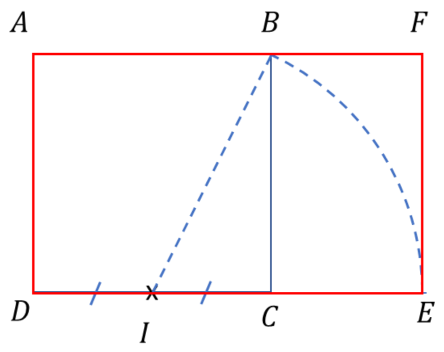

b) On repère le milieu $I$ d'un côté :




c) A l'aide d'un compas, on repère le point $E$ intersection du cercle de rayon $IB$ avec la droite $(DC)$




d) On complète avec le point $F$ pour former un rectangle $A\ D\ E\ F$ qui est un rectangle d'or




Voyons alors les propriétés de ce rectangle d'or. Le choix de l'unité étant arbitraire, nous pouvons, pour simplifier les calculs prendre la longueur $DI$ pour unité.

**<u>1ère propriété : Rapport de la longueur à la largeur :</u>**

Le triangle $B\,C\,I$ étant rectangle en $C$ avec $IC = 1, CB = 2$, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$IB^2 = IC^2 + CB^2$$

Soit :

$$IB^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

Donc :

$$IB = \sqrt{5}$$

Ainsi :

$$IE = \sqrt{5}$$

Et :

$$DE = DI + IE = 1 + \sqrt{5}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{DE}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Ce rapport est appelé **nombre d'or** et il est noté avec la lettre grecque phi, à savoir :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

Calculons en une valeur approchée manuellement :

Rappelons que par définition $\sqrt{5}$ est l'unique nombre positif vérifiant :

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

Or :

$$2 \times 2 = 4$$

$$3 \times 3 = 9$$

donc :

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

Puis en testant les décimaux à un chiffre après la virgule situés entre 2 et 3 en commençant par celui du milieu 2,5, on aboutit à :

$$2{,}2 \times 2{,}2 = 4{,}84$$

$$2{,}3 \times 2{,}3 = 5{,}29$$

donc :

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$$

Et ainsi de suite pour aboutir à :

$$2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361$$

Ce qui conduit à cette valeur approchée du nombre d'or :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi \approx \frac{3{,}236}{2} = 1{,}618}}$$

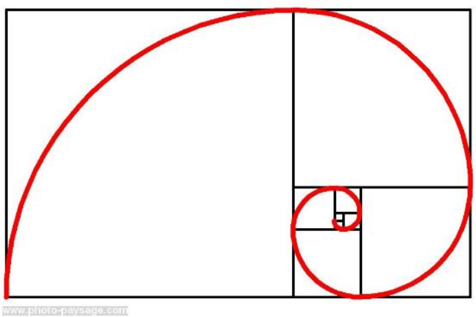
**<u>2ème propriété : Le rectangle $C\ E\ F\ B$ est également un rectangle d'or</u>**

On a en effet :

$$\frac{FE}{CE} = \frac{FE}{IE - IC} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2\left(\sqrt{5} + 1\right)}{\left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)} = \frac{2\left(\sqrt{5} + 1\right)}{\sqrt{5}^2 - 1^2} = \frac{2\left(\sqrt{5} + 1\right)}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

**<u>Spirale de Fibonacci :</u>**

En inscrivant un carré de côté $[BF]$ dans le rectangle $B\ F\ E\ C$, on fait apparaitre un nouveau rectangle d'or et l'opération peut être répétée à l'infini. On peut alors créer une **spirale dite de Fibonacci** en inscrivant dans chaque carré un quart de cercle comme sur la figure suivante.



**Le nombre d'or est le rapport de la longueur de la spirale tracée à compter du second carré à la longueur du quart de cercle inscrit dans le premier carré.**

Preuve :

La longueur du premier quart de cercle est, notant $r_0$ son rayon :

$$\boxed{L_0 = \frac{\pi}{2}\, r_0}$$

Le rayon du quart de cercle de rang $n+1$ se déduit de celui de rang $n$ par la relation de récurrence :

$$\boxed{r_{n+1} = (\varphi - 1)\, r_n}$$

La suite des rayons est donc une suite géométrique de rayon $\varphi - 1$ et de premier terme $r_0$. On en déduit pour tout entier naturel $n$ :

$$\boxed{r_n = (\varphi - 1)^n\, r_0}$$

Et la longueur du quart de cercle de rang $n$ :

$$\boxed{L_n = \frac{\pi}{2}\, r_n = (\varphi - 1)^n \frac{\pi}{2}\, r_0 = (\varphi - 1)^n L_0}$$

La longueur de la spirale de Fibonacci est donc :

$$L = \lim_{n \to +\infty} L_0 + L_1 + \cdots + L_n$$

Or la somme dont on cherche la limite est celle des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\varphi - 1$ donc en utilisant la formule :

Somme des termes = premier terme x $\frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison}$

On en déduit :

$$L_0 + L_1 + \cdots + L_n = L_0\, \frac{1 - (\varphi - 1)^{n+1}}{1 - (\varphi - 1)} = L_0\, \frac{1 - (\varphi - 1)^{n+1}}{2 - \varphi}$$

Or :

$$0 < \varphi - 1 < 1$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} (\varphi - 1)^{n+1} = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{L = \frac{L_0}{2 - \varphi}}$$

Or :

$$\frac{1}{2 - \varphi} = \frac{1}{2 - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = \frac{2}{4 - \left(\sqrt{5} + 1\right)} = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2\left(3 + \sqrt{5}\right)}{\left(3 - \sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{2\left(3 + \sqrt{5}\right)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{5} + 3}{2} = \varphi + 1$$

Donc :

$$\boldsymbol{L = (\,\varphi + 1)\,L_0}$$

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{L - L_0}{L_0}}$$

**<u>Suite de Fibonacci :</u>**

La suite de Fibonacci est la suite des puissances du nombre d'or :

$$1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \dots., \varphi^n, \varphi^{n+1}, \varphi^{n+2}$$

Elle possède une propriété remarquable qui est que tout terme est la somme des deux qui le précèdent. Cela repose sur cette propriété du nombre d'or :

$$\boldsymbol{\varphi^2 = \varphi + 1}$$

En effet :

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}{2 \times 2}$$

$$= \frac{1 \times 1 + 1 \times \sqrt{5} + \sqrt{5} \times 1 + \sqrt{5} \times \sqrt{5}}{4} = \frac{1 + 2 \times \sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{2 \times \left(3+\sqrt{5}\right)}{2 \times 2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2 + \left(1+\sqrt{5}\right)}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$$

Et donc, pour tout entier naturel $n$ :

$$\varphi^n \varphi^2 = \varphi^n(\varphi + 1)$$

$$\varphi^{n+2} = \varphi^n \times \varphi + \varphi^n \times 1$$

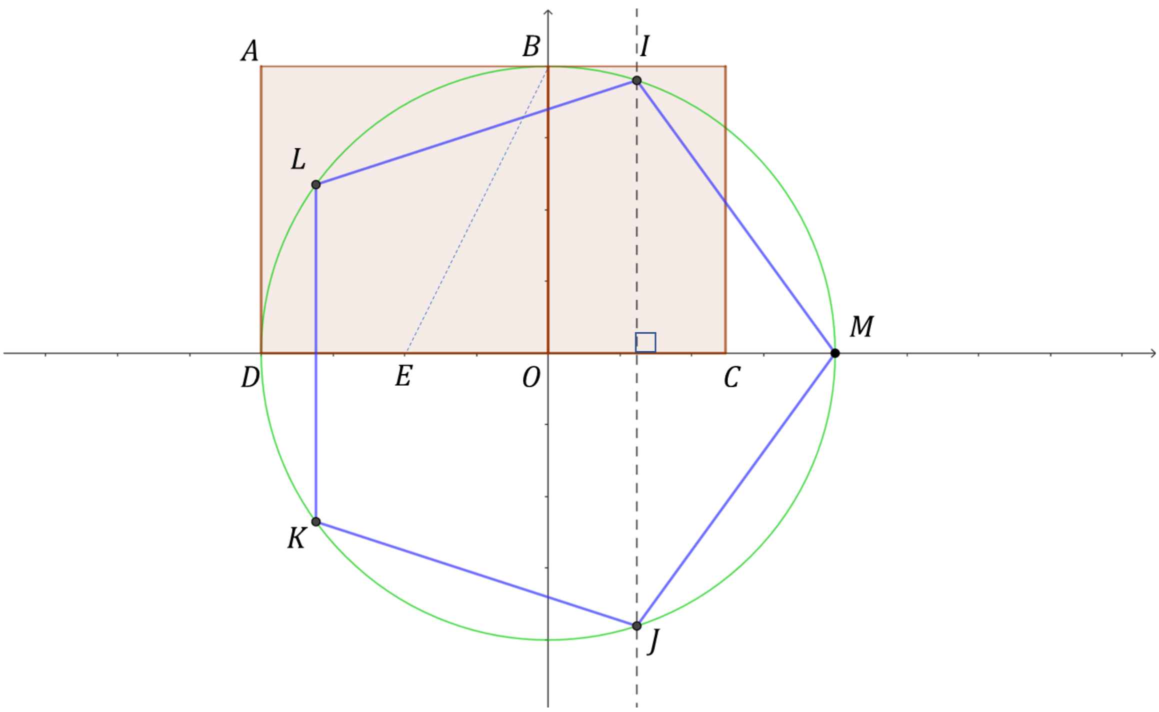
Donc :

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$$

**<u>Construction d'un pentagone régulier à l'aide d'un rectangle d'or :</u>**

Le rectangle d'or permet de construire à la règle et au compas, un pentagone régulier inscrit dans un cercle. La démarche est la suivante :

- Tracer un cercle de centre $O$ et de rayon $[OB]$
- Compléter le segment $[OB]$ en un carré $O\ B\ A\ D$
- Tracer la médiatrice du segment $[OD]$ afin de repérer le milieu $E$ de $[OD]$
- Construire le rectangle d'or en portant le point $C$ de $(OD)$ tel que $EC = EB$
- Tracer la médiatrice du segment $[OC]$. Elle coupe le cercle en deux points $I$ et $J$.
- Porter le point $M$ intersection de $(OC)$ et du cercle.
- Porter les points du cercle $K$ et $L$ tels que $JK = JM$ et $IL = IM$




Le pentagone obtenu $M, J, K, L, I$ est alors un pentagone régulier. La preuve est donnée au niveau maths CPGE rubrique nombres complexes.