Corrigé sujet 2013

Exercice 1 :

1)

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre non nul associé, alors :

$$A\,X = \lambda\,X$$

$$A^2\,X = \lambda^2\,X$$

$$(A^2 - 2\,A + 4\,I_n)\,X = (\lambda^2 - 2\,\lambda + 4)\,X$$

Donc :

$$\lambda^2 - 2\,\lambda + 4 = 0$$

Le discriminant de ce trinôme est :

$$\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 < 0$$

donc $\lambda \notin \mathbb{R}$

Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A n'a donc pas de racines réelles. Il est donc de degré pair. Comme son degré est l'ordre de A, on en déduit que n est pair.

Prouvons par l'absurde que A n'est pas proportionnelle à I_n en supposant qu'il existe un réel k tel que : $A = k\,I_n$. Alors :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = (k^2 - 2\,k + 4)\,I_n$$

Donc :

$$k^2 - 2\,k + 4 = 0$$

Ce qui est absurde puisque ce trinôme n'a pas de racine réelle.

b) Montrons que l'on a :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0 \Leftrightarrow P_A(X) = X^2 - 2\,X + 4$$

$(\Rightarrow)$ Supposons $A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0$ alors $X^2 - 2\,X + 4$ est un polynôme annulateur de

A et comme il n'existe pas de polynôme annulateur de plus bas degré, c'est le polynôme minimal $m_A(X)$ de A. $P_A(X)$ qui est un multiple de $m_A(X)$ et de coefficient dominant égal à 1 est donc égal à $m_A(X)$

$(\Leftarrow)$ Supposons $P_A(X) = X^2 - 2\,X + 4$ alors d'après le théorème de Cayley Hamilton :

$$P_A(A) = 0$$

donc :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0$$

De plus, on a :

$$P_A(X) = X^2 - Tr(A)\,X + \det(A)$$

D'où :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0 \Leftrightarrow Tr(A) = 2, \det(A) = 4$$

Considérons des matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & 2-a \end{pmatrix}$$

Elles ont une trace égale à 2. On a alors :

$$det(A) = 4 \Leftrightarrow - a^2 + 2\,a - b\,c - 4 = 0$$

Le trinôme en a a pour discriminant :

$$\Delta = 4 - 4\,(b\,c + 4) = 4\,(-\,b\,c - 3)$$

Prenons alors $c = -1$ et $b > 3$, le discriminant est alors strictement positif et le trinôme a au moins une racine réelle a. Il y a donc une infinité de matrices vérifiant (1)

2)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -13 & -6 \end{pmatrix}$$

a) $Tr(A) = 8 - 6 = 2,\ det(A) = -48 + 52 = 4$
b) Montrons par une récurrence forte sur k :

$$P(k) = \text{"}\ U_k = A^k\ \text{"}$$

<u>Initialisation</u> pour $k = 0$ et $k = 1$

$$U_0 = I_2$$

$$A^0 = I_2$$

$$U_1 = A$$

$$A^1 = A$$

Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies

Hérédité : Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1 tel que $P(q)$ soit vraie pour tout entier naturel q inférieur ou égal à k alors :

$$U_{k+1} = 2\,U_k - 4\,U_{k-1} = 2\,A^k - 4\,A^{k-1} = (2\,A - 4\,I_2)\,A^{k-1} = A^2\,A^{k-1} = A^{k+1}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, ce qui démontre la propriété pour tout entier naturel k

3)

$$M_p(x) = x^p\,U_p \quad , \quad S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} x^k\,U_k$$

a) On a pour tout couple de réels (y, z)

$$(I_2 - x\,A)\,(y + z\,A) = y\,I_2 + (z - x\,y)\,A - x\,z\,A^2$$

$$= y\,I_2 + (z - x\,y)\,A - x\,z\,(2\,A - 4\,I_2)$$

$$= (y + 4\,x\,z)\,I_2 + (z - x\,y - 2\,x\,z)\,A$$

Montrons alors qu'on peut déterminer ce couple tel que :

$$\begin{cases} y + 4\,x\,z = 1 \\ z - x\,y - 2\,x\,z = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} y = 1 - 4\,x\,z \\ z - x\,(1 - 4\,x\,z) - 2\,x\,z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 4\,x\,z \\ z\,(4\,x^2 - 2\,x + 1) = x \end{cases}$$

Or le trinôme $4\,x^2 - 2\,x + 1$ a un discriminant strictement négatif donc ne s'annule pas. Le système équivaut donc à :

$$\begin{cases} y = 1 - \dfrac{4\,x^2}{4\,x^2 - 2\,x + 1} = \dfrac{-2\,x + 1}{4\,x^2 - 2\,x + 1} \\ z = \dfrac{x}{4\,x^2 - 2\,x + 1} \end{cases}$$

Ceci prouve que la matrice $I_2 - x\,A$ est inversible et que son inverse est :

$$(I_2 - x\,A)^{-1} = \frac{-2\,x + 1}{4\,x^2 - 2\,x + 1}\;I_2 + \frac{x}{4\,x^2 - 2\,x + 1}\;A$$

b) Déterminons, pour la relation de récurrence (3) les solutions de la forme :

$$U_k = r^k\, I_2$$

en écrivant pour tout entier naturel $k \geq 2$:

$$r^k\, I_2 = 2\, r^{k-1}\, I_2 - 4\, r^{k-2} I_2$$

Ce qui équivaut, après division par r^{k-2} et élimination de I_2 à :

$$r^2 = 2\, r - 4$$

soit :

$$r^2 - 2\, r + 4 = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 4 - 16 = -12 = \left(2\, i\, \sqrt{3}\right)^2$$

Il y a donc deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{2 - 2\, i\, \sqrt{3}}{2} = 2\frac{1 - \, i\, \sqrt{3}}{2} = 2\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$r_2 = \frac{2 + 2\, i\, \sqrt{3}}{2} = 2\frac{1 + \, i\, \sqrt{3}}{2} = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

La solution générale de l'équation (3) est donc :

$$U_k = {r_1}^k\, B + {r_2}^k\, C$$

où B et C sont deux matrices définies par le système :

$$\begin{cases} B + C = I_2 \\ r_1\, B + r_2\, C = A \end{cases}$$

qui se résout par combinaison en :

$$\begin{cases} B = \dfrac{1}{r_1 - r_2}(A - r_2 I_2) \\ C = \dfrac{1}{r_2 - r_1}(A - r_1 I_2) \end{cases}$$

Ainsi :

$$x^k\, U_k = (2\, x)^k\, \left(e^{-i\, k\frac{\pi}{3}}\, B + e^{i\, k\frac{\pi}{3}}\, C\right)$$

Posons : $D_k = e^{-i\, k\frac{\pi}{3}}\, B + e^{i\, k\frac{\pi}{3}}\, C$

Les quatre coefficients de D_k sont bornés. Une condition suffisante de convergence vers 0 de $x^k\ U_k$ est donc :

$$|2\,x| < 1$$

soit

$$|x| < \frac{1}{2}$$

Et elle est nécessaire. En effet :

Si $x^k\ U_k$ tend vers 0 alors la suite extraite $x^{6\,k}\ U_{6k}$ tend vers 0. Or :

$$x^{6\,k}\ U_{6k} = (2\,x)^{6\,k}\ (B + C)$$

et $B + C$ n'est pas la matrice nulle

donc $(2\,x)^{6\,k}$ tend vers 0 d'où la condition précédente.

c) On a

$$(I_2 - x\,A)\ S_p(x) = I_2 - x^{p+1}\ A^{p+1} = I_2 - U_{p+1}$$

D'où :

$$S_p(x) = (I_2 - x\,A)^{-1} - (I_2 - x\,A)^{-1} U_{p+1}$$

La suite U_{p+1} tendant vers 0 quand p tend vers l'infini, il est aisé de vérifier que son produit à gauche ou à droite par une matrice constante tend aussi vers 0 et donc que $(I_2 - x\,A)^{-1} U_{p+1}$ tend vers 0. Ainsi $S_p(x)$ tend vers $(I_2 - x\,A)^{-1}$. On peut alors écrire ceci sous une forme analogue à celle pour la somme des termes d'une suite géométrique de réels :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\ A^k = (I_2 - x\,A)^{-1}$$

Exercice 5

1)

Soit $(x, y) \in [0; +\infty[^2 \backslash \{(0,0)\}$ alors pour $x \neq 0$:

$$0 \leq f(x, y) \leq \frac{x\, y}{(1+0)\,(1+0)\,(x+0)} = y$$

et pour $y \neq 0$:

$$0 \leq f(x, y) \leq \frac{x\, y}{(1+0)\,(1+0)\,(y+0)} = x$$

Introduisons la norme infinie :

$$\|(x, y)\|_\infty = sup(|x|, |y|)$$

alors :

$$0 \leq f(x, y) \leq \|(x, y)\|_\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0}$$

On peut donc prolonger f par continuité en posant :

$$\boxed{f(0,0) = 0}$$

2)

Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ alors on a :

$$0 \leq f(x, y) \leq \frac{x\, y}{(0+x)\,(0+y)\,(x+y)} = \frac{1}{x+y}$$

Donc :

$$0 \leq f(x, y) \leq sup\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$ posons :

$$A = \frac{1}{\varepsilon}$$

Soit $(x, y) \in [0; +\infty[^2 \backslash [0, A]^2$ alors

Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors $f(x,y) = 0$ donc

$$0 \leq f(x,y) < \varepsilon$$

Sinon $x > A$ et $y > A$ donc :

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{A} = \varepsilon, \quad \frac{1}{y} < \frac{1}{A} = \varepsilon$$

Soit :

$$sup\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) < \varepsilon$$

d'où :

$$0 \leq f(x,y) < \varepsilon$$

3) Notons que :

$$f(1,1) = \frac{1}{8}$$

et pour $\varepsilon = \frac{1}{8}$ on a :

$$\forall\ (x,y) \in [0;+\infty[^2 \backslash [0,8]^2 :\ 0 \leq f(x,y) < \frac{1}{8}$$

Or f est continue sur le domaine compact $[0,8]^2$ donc elle admet un maximum qu'elle atteint en un point (x_0, y_0). Ainsi :

$$f(x_0, y_0) \geq f(1,1) = \frac{1}{8}$$

Donc $f(x_0, y_0)$ est également le maximum global de la fonction sur $[0;+\infty[^2 \backslash \{(0,0)\}$

4) Notons d'abord que f est nulle sur la frontière de $[0;+\infty[^2 \backslash \{(0,0)\}$. Le (ou les) point(s) en lesquel(s) la fonction atteint son maximum est (sont) donc intérieurs au domaine $[0,8]^2$. Or f est différentiable sur l'intérieur de ce domaine. Un point $M(x,y)$ de ce dernier en lequel f atteint son maximum vérifie donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(M) = 0 \end{cases}$$

Or :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{y\,(1+x)(1+y)(x+y) - x\,y\,(1+y)[(x+y)+(1+x)]}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2} =$$

$$= \frac{y\,(1+y)\,[(1+x)\,(x+y) - x\,(2\,x+y+1)]}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2}$$

$$= \frac{y\,(1+y)\,(y-x^2)}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2}$$

De même par échange de x et de y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{x\,(1+x)\,(x-y^2)}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2}$$

Ainsi le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} y\,(1+y)\,(y-x^2) = 0 \\ x\,(1+x)\,(x-y^2) = 0 \end{cases}$$

Comme $x > 0$ et $y > 0$ il équivaut à :

$$\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} y = y^4 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Soit :

$$x = y = 1$$

La fonction f admet donc pour maximum $\frac{1}{8}$ et elle l'atteint en un point unique $A(1,1)$