*Fiche méthode : calcul de primitives*

1) **Changement de variable :**

Il permet de se ramener à chercher des primitives de fonctions de référence.

Principe  pour trouver une primitive analytique de $f(x)$ :

Poser :

$$u = k(x) \quad \text{ou} \quad g(u) = k(x)$$

Inverser :

$$x = k^{-1}(u) \quad \text{ou} \quad x = k^{-1}(g(u))$$

Dériver :

$$u' = k'(x) = k'(k^{-1}(u)) \quad \text{ou} \quad g'(u)\, u' = k'(x) = k'(k^{-1}(g(u)))$$

Remplacer

$$f(x) = \frac{f(k^{-1}(u))}{k'(k^{-1}(u))}\, u' \qquad ou \qquad \frac{g'(u)\, f(k^{-1}(g(u)))}{k'(k^{-1}(g(u)))}\, u' \quad = \quad h(u)\, u'$$

Le changement de variable est intéressant si $h(u)$ a une primitive analytique $H(u)$ auquel cas une primitive de $f$ est :

$$f(x) = H(u) = H(k(x))$$

Il faut alors regarder sur quels intervalles maximaux cette primitive peut être définie.

**2) Intégration par partie :**

Elle concerne un produit de fonctions pour lequel il n'apparait pas de primitive analytique simple.

Principe  pour trouver une primitive analytique de $f(x)\, g(x)$ :

On pose :

$$u = f(x), \;\; v' = g(x)$$

$$u' = f'(x), \;\; v = G(x)$$

Et on a :

$$\int f(x)\, g(x) = f(x)\, G(x) - \int f'(x)\, G(x)$$

Cela est intéressant si la primitive du nouveau produit $f'(x)\, G(x)$ peut se calculer plus aisément.

Voici quelques cas :

$$f(x) = polynôme, \qquad g(x) = e^{a\,x}$$

$$f(x) = polynôme, \qquad g(x) = cos(a\,x)\ ou\ sin(a\,x)$$

$$f(x) = Ln(polynôme), \qquad g(x) = polynôme$$

**4) fraction rationnelle trigonométrique**

Principe, appelé règles de Bioche, pour trouver une primitive analytique de $f\big(cos(x), sin(x)\big)$ où $f$ fraction rationnelle de deux variables

Si $f\big(cos(-x), sin(-x)\big)\ d(-x) = f\big(cos(x), sin(x)\big)\ dx$ on pose : $u = cos(x)$

Si $f\big(cos(\pi - x), sin(\pi - x)\big)\ d(\pi - x) = f\big(cos(x), sin(x)\big)\ dx$ on pose : $u = sin(x)$

Si $f\big(cos(x + \pi), sin(x + \pi)\big)\ d(x + \pi) = f\big(cos(x), sin(x)\big)\ dx$ on pose : $u = tan(x)$

Sinon on pose :

$$u = tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

sachant :

$$cos(x) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \qquad sin(x) = \frac{2\,u}{1 + u^2}$$

**4) Polynôme trigonométrique**

Principe pour trouver une primitive analytique de $f\big(cos(x), sin(x)\big)$ où $f$ polynôme de deux variables :

Si aucune des règles de Bioche n'est vérifiée, on linéarise les termes du polynômes, avec les formules d'Euler :

$$cos^n(x)\ sin^m(x) = \left(\frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}\right)^n \left(\frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i}\right)^m$$

**5) Primitive de fonctions avec racine carrée**

Principe pour trouver une primitive analytique de $\sqrt{f(x)}$ où $f$ fraction rationnelle :

Il est souvent intéressant de faire le changement de variable :

$$u = \sqrt{f(x)}, \ \ u^2 = f(x)\,, \qquad 2\,u\,u' = f'(x)$$