Enoncé :

1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit V et W deux sous espaces vectoriels de même dimension démontrer qu' il existe un sous espace vectoriel H tel que :

$$\boldsymbol{V \oplus H = W \oplus H = E}$$

2) Exemples : on se place dans $E = \mathbb{R}^4$, déterminer une base de H dans les deux cas suivants :

1er cas : $V = Vect[(1,2,3,4)], W = Vect[(0,1,0,1)]$

2ème cas : $V = Vect[(1,0,1,0),(0,1,1,0)], W = Vect[(0,1,0,0),(0,0,0,1)]$

Réponse :

1) Si $V = W$ le résultat est trivial

Sinon nous allons définir un algorithme permettant de créer une suite strictement croissante au sens de l'inclusion de couples de sous espaces $(V_0, W_0), (V_1, W_1), \dots, (V_k, W_k)$ en procédant comme suit :

Initialisation :

$$V_0 = V, W_0 = W, V_0 \neq W_0$$

1ère étape :

V_0 n'étant pas inclus dans W_0 et W_0 n'étant pas inclus dans V_0, il existe un vecteur $x \in V_0 \backslash W_0$ et un vecteur $y \in W_0 \backslash V_0$. On pose alors :

$$e_1 = x + y$$

e_1 n'est ni dans V_0 ni dans W_0. On définit alors les sous espaces :

$$V_1 = V_0 \oplus Vect[e_1], \qquad W_1 = W_0 \oplus Vect[e_1]$$

On a alors :

$$dim(V_1) = dim(W_1) = dim(V) + 1$$

Etapes suivantes :

On suppose construits V_k et W_k pour $k \geq 0$ et tels que :

$$dim(V_k) = dim(W_k) = dim(V) + k$$

Si $V_k = W_k$ on sort de l'algorithme

Sinon V_k n'étant pas inclus dans W_k et W_k n'étant pas inclus dans V_k, il existe un vecteur $x \in V_k \backslash W_k$ et un vecteur $y \in W_k \backslash V_k$. On pose alors :

$$e_{k+1} = x + y$$

e_{k+1} n'est ni dans V_k ni dans W_k. On définit alors les sous espaces :

$$V_{k+1} = V_k \oplus Vect[e_{k+1}], \qquad W_{k+1} = W_k \oplus Vect[e_{k+1}]$$

On a :

$$dim(V_{k+1}) = dim(W_{k+1}) = dim(V) + k + 1$$

Montrons alors par l'absurde qu'il existe une étape $q \in \mathbb{N}^*$ pour laquelle : $V_q = W_q$. Si ce n'était pas le cas, on créerait en effet une suite strictement croissante infinie de sous espaces V_k donc une suite strictement croissante d'entiers naturels $dim(V_k)$ majorée par $dim(E)$ ce qui est absurde.

Si on désigne alors par H_q un supplémentaire de V_q dans E. Alors :

$$V_q \oplus H_q = W_q \oplus H_q = E$$

Or :

$$V_q = V \oplus Vect[e_1, \dots, e_q]$$

$$W_q = W \oplus Vect[e_1, \dots, e_q]$$

Posons :

$$H = Vect[e_1, \dots, e_q] \oplus H_q$$

On a alors :

$$V \oplus H = W \oplus H = E$$

2)

1er cas : on pose :

$$e_1 = (1,2,3,4) + (0,1,0,1) = (1,3,3,5)$$

$$V_1 = V \oplus Vect[e_1] = V + W$$

$$W_1 = W \oplus Vect[e_1] = V + W$$

On s'arrête donc à l'étape 1 et on complète une base de V_1 en une base de E en créant une matrice de déterminant non nul dont les deux premières lignes sont les vecteurs de base de V et W.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$H = Vect[(1,3,3,5), (0,0,1,0), (0,0,0,1)]$$

2ème cas :

Etape 1 :

Notons d'abord qu'en formant une matrice avec les vecteurs de base de V et W, on obtient une matrice de déterminant non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Les quatre vecteurs forment donc une base de E.

Par conséquent :

$$(0,1,1,0) \in V \backslash W$$

$$(0,0,0,1) \in W \backslash V$$

On pose donc :

$$e_1 = (0,1,1,0) + (0,0,0,1) = (0,1,1,1)$$

$$V_1 = V \oplus Vect[e_1] = Vect[(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)]$$

$$W_1 = W \oplus Vect[e_1] = Vect[(0,1,0,0),(0,0,0,1),(0,1,1,0)]$$

V_1 et W_1 étant distincts , on passe à l'étape 2

Etape 2 :

$$(1,0,1,0) \in V_1 \backslash W_1$$

$$(0,1,0,0) \in W_1 \backslash V_1$$

On pose donc :

$$e_2 = (1,0,1,0) + (0,1,0,0) = (1,1,1,0)$$

$$V_2 = V_1 \oplus Vect[e_2] = E$$

$$W_2 = W_1 \oplus Vect[e_2] = E$$

Ainsi :

$$H = Vect[e_1, e_2] = Vect[(0,1,1,1),(1,1,1,0)]$$