Sommes de puissances d'entiers consécutifs

1) Pour $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ développer $(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^{3}$ puis exprimer de deux façons :

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{3}-k^{3}\right)$$

En déduire une formule simple pour

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2}$$

2) Faire le même travail avec $(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^{4}$ et en déduire une formule simple pour :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{3}$$

3) Généraliser le procédé en développant $(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^{P}$ pour $\boldsymbol{p} \geq \mathbf{2}$ et en déduire une relation de récurrence sur les sommes de la forme :

$$S_{m}=\sum_{k=1}^{n} k^{m} \quad , m \in \mathbb{N}$$

Réponses :

1)

$$(k+1)^{3}=k^{3}+3\, k^{2}+3\, k+1$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{3}-k^{3}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(3\, k^{2}+3\, k+1\right)$$

Développons le sigma du second membre par linéarité :

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{3}-k^{3}\right)=3 \sum_{k=1}^{n} k^{2}+3 \sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} 1$$

Calculons d'une autre façon, la somme du membre de gauche, qui est télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{3}-k^{3}\right)=(n+1)^{3}-1^{3}$$

On en déduit :

$$(n+1)^{3}-1=3 \sum_{k=1}^{n} k^{2}+3\, \frac{n\,(n+1)}{2}+n$$

Isolons la somme des carrés :

$$(n+1)^3 - \frac{3\,n\,(n+1)}{2} - (n+1) = 3\,\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Factorisons par $(n+1)$:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)\,\left((n+1)^2 - \frac{3}{2}\,n - 1\right)$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)\,\left(n^2 + 2\,n + 1 - \frac{3}{2}\,n - 1\right)$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)\,\left(n^2 + \frac{1}{2}\,n\right)$$

Factorisons par n :

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n\,(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)(2\,n+1)}{6}}$$

2) Faisons le même travail un degré au-dessus en raccourcissant les étapes:

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^4 - k^4) = \sum_{k=1}^{n}(4\,k^3 + 6\,k^2 + 4\,k + 1)$$

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\,\frac{n\,(n+1)(2\,n+1)}{6} + 4\,\frac{n\,(n+1)}{2} + n$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^4 - (n+1) - n\,(n+1)(2\,n+1) - 2\,n\,(n+1)$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)\,((n+1)^3 - 1 - n\,(2\,n+1) - 2\,n)$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)\,(n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1 - 1 - n\,(2\,n+1) - 2\,n)$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n\,(n+1)\,(n^2 + 3\,n + 3\ - (2\,n+1) - 2)$$

$$4 \sum_{k=1}^{n} k^3 = n\,(n+1)\,(n^2 + \, n)$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2}$$

3) Cas général

$$\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^p - k^p) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=0}^{p-1} \binom{p}{q}\, k^q$$

$$(n+1)^p - 1 = \sum_{q=0}^{p-1} \binom{p}{q} \sum_{k=1}^{n} k^q$$

On trouve ainsi la relation de récurrence :

$$\boxed{(n+1)^p = 1 + \sum_{q=0}^{p-1} \binom{p}{q}\, S_q}$$