Enoncé :

**Partie 1 :**

**Soit $\mathbb{E}$ un ensemble muni d'une loi $+$ et d'une loi $\times$ commutative. On définit un triplet pythagoricien comme étant un triplet $(a, b, c)$ d'éléments de $\mathbb{E}$ tels que :**

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**On notera $\mathbb{T}_{\mathbb{E}}$ l'ensemble des triplets pythagoriciens de $\mathbb{E}$.**

**On dira que deux triplets pythagoriciens $(a, b, c)$ et $(d, e, f)$ sont liés si il existe un élément $x$ de $\mathbb{E}$ tel que :**

$$(a, b, c) = (d\,x, e\,x, f\,x) \;\; ou \;\; (d, e, f) = (a\,x, b\,x, c\,x)$$

**Deux triplets pythagoriciens $(a, b, c)$ et $(b, a, c)$ seront dits assimilables.**

**On appelle triplet pythagoricien nul, le triplet $(0, 0, 0)$.**

**1) Montrer que si $(a, b, c)$ est un triplet pythagoricien de $\mathbb{E}$ alors pour tout élément $x$ de $\mathbb{E}$, $(a\,x, b\,x, c\,x)$ est un triplet pythagoricien de $\mathbb{E}$.**

**2) Montrer que si $(a, b, c)$ et $(d, e, f)$ sont deux triplets pythagoriciens de $\mathbb{E}$ alors il existe un couple $(x, y)$ d'éléments de $\mathbb{E}$ tel que $(x, y, e\,f)$ soit un triplet pythagoricien et exprimer un tel couple à partir des éléments des deux triplets initiaux.**

**3) On considère ici $\mathbb{E} = \mathbb{N}$. Déterminer deux triplets pythagoriciens non liés (donc forcément non nuls) et non assimilables. En utilisant 2) construire un troisième triplet non liés aux deux précédents.**

**Partie 2 :**

**On considère ici $\mathbb{E}$ comme étant l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On dira qu'un polynôme $P$ de $\mathbb{E}$ est pythagoricien si il existe un couple $(A, B)$ de polynômes de $\mathbb{E}$ tel que :**

$$A^2 + B^2 = P$$

**a) Montrer que si $P$ est pythagoricien alors $P$ est de degré pair et la fonction polynomiale associée est positive ou nulle.**

**b) Montrer que tous les polynômes $P$ de degré 0 positifs ou nuls et de degré 2 sont pythagoriciens et donnez dans chaque cas un exemple de couple $(A, B)$ associé.**

**c) Montrer que si deux polynômes $P$ et $Q$ sont pythagoriciens alors leur produit l'est également. En déduire que tout polynôme de degré pair dont la fonction associée est positive ou nulle est pythagoricien.**

**d) Montrer que si $(A, B, C)$ est un triplet pythagoricien de $\mathbb{E}$ alors le polynôme $P = C^2$ est pythagoricien.**

**e) Montrer que si $A^2 + B^2 = P$ alors il n'existe pas nécessairement de polynôme $C$ tel que $(A, B, C)$ soit un triplet pythagoricien.**

**f) Soit le polynôme $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, déterminer un couple de polynômes $(A, B)$ tel que $A^2 + B^2 = P$**

Réponses :

Partie I

1) partons de

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Et multiplions par $x^2$ :

$$a^2x^2 + b^2x^2 = c^2x^2$$

Ainsi :

$$(a\,x)^2 + (b\,x)^2 = (c\,x)^2$$

2) Partons de :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$d^2 + e^2 = f^2$$

Et multiplions membre à membre :

$$a^2d^2 + a^2e^2 + b^2d^2 + b^2e^2 = c^2f^2$$

Faisons apparaitre deux identités remarquables :

$$(a\,d + b\,e)^2 + (a\,e - b\,d)^2 = (c\,f)^2$$

A noter que si on considère dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $\vec{u} = (a, b), \vec{v} = (d, e)$ , la relation précédente traduit une identité géométrique bien connue :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \left(det(\vec{u}, \vec{v})\right)^2 = \|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2$$

3) Le triplets (3,4,5) et (5,12,13) sont pythagoriciens car :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

En utilisant les vecteurs $\vec{u} = (3,4), \vec{v} = (5,12)$ et en calculant :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 + 4 \times 12 = 63, \qquad det(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times 12 - 4 \times 5 = 16$$

On obtient :

$$63^2 + 16^2 = 65^2$$

Donc le triplet (63,16,65) est pythagoricien et il n'est ni lié ni assimilable aux deux précédents.

Partie II

a) partons de

$$A^2 + B^2 = P$$

$A^2$ et $B^2$ étant de degré pair, leur somme $P$ l'est aussi.

De même $A^2$ et $B^2$ étant des polynômes ayant des fonctions associées positives ou nulles, leur somme $P$ a une fonction associée positive ou nulle.

b) Si $P$ est de degré 0 c'est une constante positive non nulle $c$ et donc :

$$P = \left(\sqrt{c}\right)^2 + 0^2$$

Si $P$ est de degré 2 alors il est de la forme :

$$P = c + b\,X + a\,X^2$$

Avec :

$$a > 0, \qquad \Delta = b^2 - 4\,a\,c \leq 0$$

Et la forme canonique s'écrit :

$$P = a\left(X - \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2} = \left(\sqrt{a}\left(X - \frac{b}{2\,a}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\,a}\right)^2$$

c) Partons de :

$$A^2 + B^2 = P$$

$$C^2 + D^2 = Q$$

Alors comme vu en partie I :

$$(A\,C + B\,D)^2 + (A\,D - B\,C)^2 = P\,Q$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $T_n$ suivante :

| |
|---|
| Si $P$ est un polynôme de degré $2\,n$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0$ alors $P$ est pythagoricien. |

Initialisation : Déjà vu pour $n = 0$ et $n = 1$

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour $n \geq 2$ et soit $P$ est un polynôme de degré $2\,n + 2$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R} : P(x)$. Distinguons alors deux cas :

1er cas : $P$ admet une racine réelle $\lambda$. Elle est donc nécessairement d'ordre pair, sinon $P$ changerait de signe au voisinage de cette racine. $P$ est donc divisible par $(X - \lambda)^2$

2ème cas : $P$ admet une racine complexe $\lambda$ et donc sa conjuguée $\bar{\lambda}$. $P$ est donc divisible par le polynôme :

$$(X - \lambda)\left(X - \bar{\lambda}\right)$$

ce polynôme étant de signe positif ou nul car sans racine réelle.

Donc dans les deux cas, il existe un polynôme $Q$ de degré 2 et un polynôme $R$ de degré $2\,n$ tels que :

$$P = Q\,R$$

$Q$ et $R$ sont alors pythagoriciens et donc leur produit l'est aussi ce qui prouve l'hérédité

d) Cela vient de :

$$A^2 + B^2 = C^2$$

e) Prenons $P = X^2 + 1$ alors

$$X^2 + 1^2 = P$$

Donc $P$ est pythagoricien.

Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme $C$ tel que $(X, 1, C)$ soit un triplet pythagoricien alors :

$$X^2 + 1^2 = C^2$$

Donc $C$ est de degré 1 et donc il admet un racine réelle et donc $C^2 = P$ admet une racine réelle ce qui est absurde.

f) Factorisons $P$ dans $\mathbb{C}$ en notant que ses racines sont les 4 racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1 :

$$P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \left(X - e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X - e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)$$

$$= \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right)$$

où on rappelle que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Retrouvons cette factorisation par une autre méthode en notant que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2\left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x^2\left(\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1\right)$$

$$= x^2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1\right)$$

Soit en posant :

$$x + \frac{1}{x} = y$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2\,(y^2 + y - 1)$$

Les racines du polynôme en $y$ étant :

$$y_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \qquad y_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Donc :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2\left(y - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(y - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= x^2\left(x + \frac{1}{x} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{x} - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \left(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, x + 1\right)\left(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} x + 1\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 &= \left(X^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, X + 1\right)\left(X^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} X + 1\right) \\ &= \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\,\pi}{5}\right) X + 1\right) \end{aligned}}$$

Déterminons les formes canoniques des deux facteurs :

$$X^2 - 2\cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) X + 1 = \left(X - \cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\right)^2 + 1$$

$$=$$

Finalement

$$\boxed{\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) X + 1\right) = \left(X - \cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\right)^2}$$

Et par un travail analogue

$$\boxed{\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\,\pi}{5}\right) X + 1\right) = \left(X - \cos\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)\right)^2}$$

Ainsi :

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = A^2 + B^2$$

Où :

$$A = \left(X - \cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\right)\left(X - \cos\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)\right) + \sin\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)$$

$$= X^2 + \left(\cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)\right) X + \cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\,\pi}{5}\right) + +\sin\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)$$

$$= X^2 + \frac{1}{2}\, X + \cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)$$

Et :

$$B = \sin\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\left(X - \cos\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)\right) - \sin\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)\left(X - \cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\right)$$

$$= \left(\sin\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)\right) X + \sin\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)\ \cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)\ \sin\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)$$

$$= 2\,cos\left(\frac{3\,\pi}{5}\right)\,sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\,X + sin\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)$$

$$= -2\,cos\left(-\frac{2\,\pi}{5}\right)\,sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\,X + sin\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)$$

Finalement, la décomposition est :

$$\boxed{X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \left(X^2 + \frac{1}{2}\,X + cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\right)^2 + \left(2\,cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\,sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\,X + sin\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\right)^2}$$

On peut vérifier en développant le membre de droite, ce qui est fastidieux mais n'ayons pas peur des calculs

Les coefficients sont :

Terme en $X^4$ : 1

Terme en $X^3$ : 1

Terme en $X^2$ :

$$\frac{1}{4} + 2\,cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 4\,cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\,sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + 2\,cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 4\,cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\left(\frac{1 - cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)}{2}\right)$$

$$= \frac{1 + 8\,cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 8\,cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) - 8\,cos^3\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)}{4}$$

Sachant que $2\,cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)$ vérifie l'équation :

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Donc :

$$4\,cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 2\,cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) - 1 = 0$$

Et donc :

$$8\,cos^3\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 4\,cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) - 2\,cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) = 0$$

Soit :

$$4\,cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) - 2\,cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) = -8\,cos^3\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)$$

Et le terme devient :

$$\frac{1 + 8\,cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 8\,cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 4\,cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) - 2\,cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)}{4}$$

$$= \frac{1 + 6\, cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 12\, cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)}{4}$$

$$= \frac{1 + 3\,\left(2\, cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 4\, cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\right)}{4}$$

$$= \frac{1 + 3\ \times 1}{4} = 1$$

Terme en $X$ :

$$cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 4\, sin\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\, cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\, sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 2\, sin\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)\, sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \ cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) + 2\, sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$$

Terme constant :

$$cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) +\ sin^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right) = 1$$

C’est donc bien vérifié !!!