Exercice :

Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ on dit que $P(X)$ est unitaire si le coefficient dominant de $P(X)$ est 1, autrement dit si le polynôme est de la forme $P(X) = X^n + a_{n-1} X^n \dots + a_1 X + a_0$

Dans la suite $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{C}(X)$ désigne une fraction rationnelle à coefficients complexes.

On dit que a est pôle de $F(X)$ si a est racine de $Q(X)$ et pôle simple de $F(X)$ si a est racine simple de $Q(X)$.

1) **Montrer :**

$$a \text{ pôle simple de } F(X) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(a) = 0 \\ Q'(a) \neq 0 \end{cases}$$

2) **Montrer que si a est pôle simple de $F(X)$ alors $F(X)$ se met sous forme :**

$$F(X) = \frac{c}{X-a} + \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$$

où $(P_1(X), Q_1(X)) \in \mathbb{C}[X]^2, c \in \mathbb{C}, Q(X) = (X-a)\, Q_1(X)$ et $Q_1(a) \neq 0$, puis en déduire :

$$c = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

3) **On considère la fraction rationnelle :**

$$F(X) = \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$$

a) **Déterminer les pôles de $F(X)$**
b) **Sont-ils simples ? Justifier**
c) **En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$**

Correction

1) Si a pôle simple de $F(X)$ alors : $Q(X) = (X-a)\, Q_1(X)$ où $Q_1(a) \neq 0$. Ainsi :

$$Q'(X) = Q_1(X) + (X-a)\, Q'_1(X)$$

et donc :

$$Q'(a) = Q_1(a) \neq 0$$

Réciproquement, si $Q(a) = Q'(a) \neq 0$ alors $Q(X) = (X-a)\, Q_1(X)$ et

$$Q_1(a) = Q'(a) \neq 0$$

2) En posant $Q(X) = (X-a)\, Q_1(X)$ où $Q_1(a) \neq 0$ les polynômes $X-a$ et $Q_1(X)$ étant premiers entre eux, le théorème de Bezout permet d'affirmer l'existence de deux polynômes $U_1(X)$ et $U_2(X)$ tels que :

$$Q_1(X)\, U_1(X) + (X-a)\, U_2(X) = 1$$

Ainsi :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(X)\,[Q_1(X)\,U_1(X) + (X-a)\,U_2(X)]}{(X-a)\,Q_1(X)}$$

$$= \frac{P(X)\,Q_1(X)\,U_1(X)}{(X-a)\,Q_1(X)} + \frac{P(X)(X-a)\,U_2(X)}{(X-a)\,Q_1(X)}$$

$$= \frac{P(X)\,U_1(X)}{X-a} + \frac{P(X)\,U_2(X)}{Q_1(X)}$$

Intégrons une division euclidienne :

$$P(X)\,U_1(X) = (X-a)\,S(X) + c, \qquad c \in \mathbb{C}$$

$$F(X) = \frac{(X-a)\,S(X) + c}{X-a} + \frac{P(X)\,U_2(X)}{Q_1(X)}$$

$$= S(X) + \frac{c}{X-a} + \frac{P(X)\,U_2(X)}{Q_1(X)}$$

$$= \frac{c}{X-a} + \frac{P(X)\,U_2(X) + S(X)\,Q_1(X)}{Q_1(X)}$$

Finalement :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{c}{X-a} + \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$$

Multiplions cette relation par $X - a$:

$$\frac{P(X)}{Q_1(X)} = c + \frac{P_1(X)(X-a)}{Q_1(X)}$$

Et évaluons cette fraction en a :

$$\frac{P(a)}{Q_1(a)} = c$$

Soit, compte tenu de $Q_1(a) = Q'(a)$:

$$\frac{P(a)}{Q'(a)} = c$$

3) On a :

$$a \text{ pôle de } F(X) \Leftrightarrow \; a^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \; a \in \left\{ e^{\,i\,\frac{2\,k\,\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

$F(X)$ a donc n pôles distincts qui sont les racines n-ièmes complexes de l'unité.

b) Les n pôles distincts de $F(X)$ sont les racines du polynôme $X^n - 1$ qui est de degré n. Chacune de ces racines est donc simple.

c) La décomposition en éléments simples de $F(X)$ se met sous forme :

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{X - a_k}$$

où :

$$a_k = e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{n}}$$

Posons : $P(X) = X^{n-1}, Q(X) = X^n - 1$ soit $Q'(X) = n\,X^{n-1}$

D'après le résultat établi en 2) on a :

$$c_k = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} = \frac{{a_k}^{n-1}}{n\,{a_k}^{n-1}} = \frac{1}{n}$$

Ainsi :

$$\boxed{F(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{n}}}}$$