Soit à étudier l'ensemble dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé du plan est :

$$(2\,x - \,y)^2 = x + \,y + 1$$

<u>Solution</u> :

<u>1ère étape</u> :

On commence par normer les coefficients de l'expression affine sous le carré :

$$5\,\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x - \frac{1}{\sqrt{5}}\,y\right)^2 = x + \,y + 1$$

<u>2ème étape</u> :

On ajoute m dans l'expression sous le carré et on compense dans le second membre :

$$5\,\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x - \frac{1}{\sqrt{5}}\,y + m\right)^2 = x + \,y + 1 + 10\,m\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x - \frac{1}{\sqrt{5}}\,y\right) + 5\,m^2$$

$$5\,\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x - \frac{1}{\sqrt{5}}\,y + m\right)^2 = \left(1 + \frac{20\,m}{\sqrt{5}}\right)\,x + \left(1 - \frac{10\,m}{\sqrt{5}}\right)\,y + 1 + 5\,m^2$$

<u>3ème étape</u> :

On cherche m tel que les colonnes suivantes soient colinéaires :

$$\begin{pmatrix} 1 + \dfrac{20\,m}{\sqrt{5}} \\ 1 - \dfrac{10\,m}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

En écrivant la nullité du déterminant :

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{20\,m}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 - \frac{10\,m}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} + 10\,m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{10\sqrt{5}}$$

On a alors :

$$1 + \frac{20\,m}{\sqrt{5}} = 1 - \frac{20}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{10\sqrt{5}} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$1-\frac{10\,m}{\sqrt{5}}=1+\frac{10}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{10\sqrt{5}}=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$$

$$1+5\,m^2=1+5\left(-\frac{1}{10\sqrt{5}}\right)^2=1+\frac{5}{100\times 5}=\frac{101}{100}$$

L'équation devient :

$$5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x-\frac{1}{\sqrt{5}}\,y-\frac{1}{10\sqrt{5}}\right)^2=\frac{3}{5}\,x+\frac{6}{5}\,y+\frac{101}{100}$$

Soit :

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x-\frac{1}{\sqrt{5}}\,y-\frac{1}{10\sqrt{5}}\right)^2=\frac{3}{5\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,x+\frac{2}{\sqrt{5}}\,y+\frac{101\sqrt{5}}{300}\right)$$

<u>4ème étape</u> :

On fait le changement de repère orthonormé :

$$\begin{cases} X=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\,x-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,y-\dfrac{1}{10\sqrt{5}} \\ Y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,x+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\,y+\dfrac{101\sqrt{5}}{300} \end{cases}$$

Soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{10\sqrt{5}} \\ \dfrac{101\sqrt{5}}{300} \end{pmatrix}$$

Ce qui s'inverse en transposant la matrice :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{10\sqrt{5}} \\ \dfrac{101\sqrt{5}}{300} \end{pmatrix}$$

Soit :

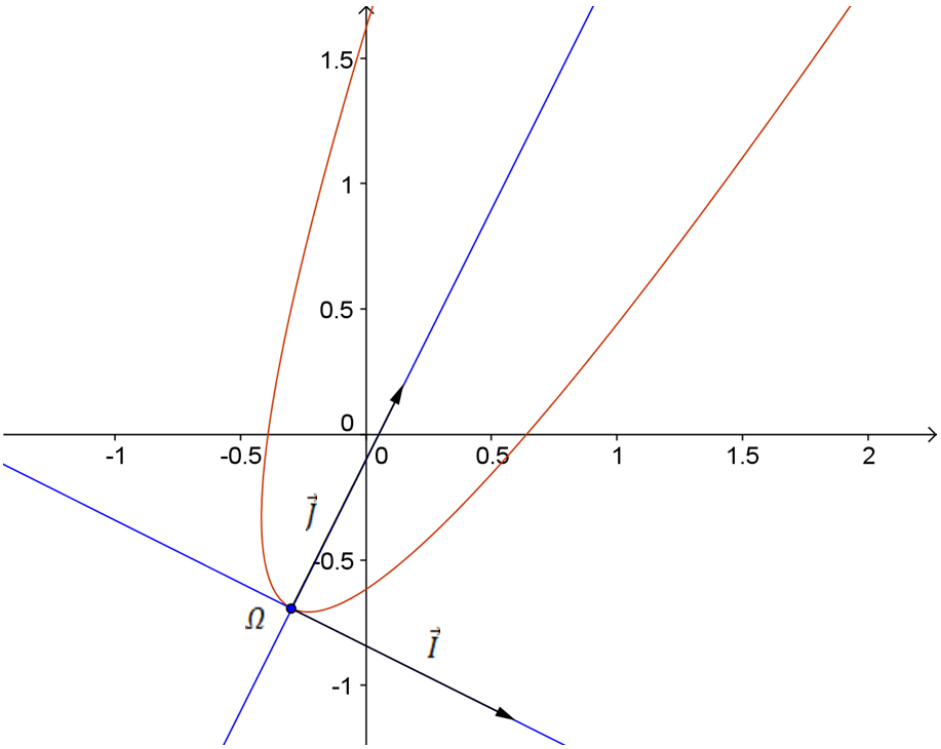
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{89}{300} \\ -\frac{52}{75} \end{pmatrix}$$

On introduit la base orthonormée :

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}) \qquad \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath})$$

Et le point Ω tel que :

$$\overrightarrow{O\Omega} = -\frac{89}{300}\,\vec{\imath} - \frac{52}{75}\vec{\jmath}$$

Alors l'ensemble a pour équation, dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$:

$$Y = \frac{5\sqrt{5}}{3}\,X^2$$