I Mouvement hélicoïdal d'une particule chargée dans un champ magnétique

Un électron arrive dans une région de l'espace où un règne un champ magnétique uniforme et munie d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$

La vecteur vitesse de l'électron, à son entrée dans la zone de champ est :

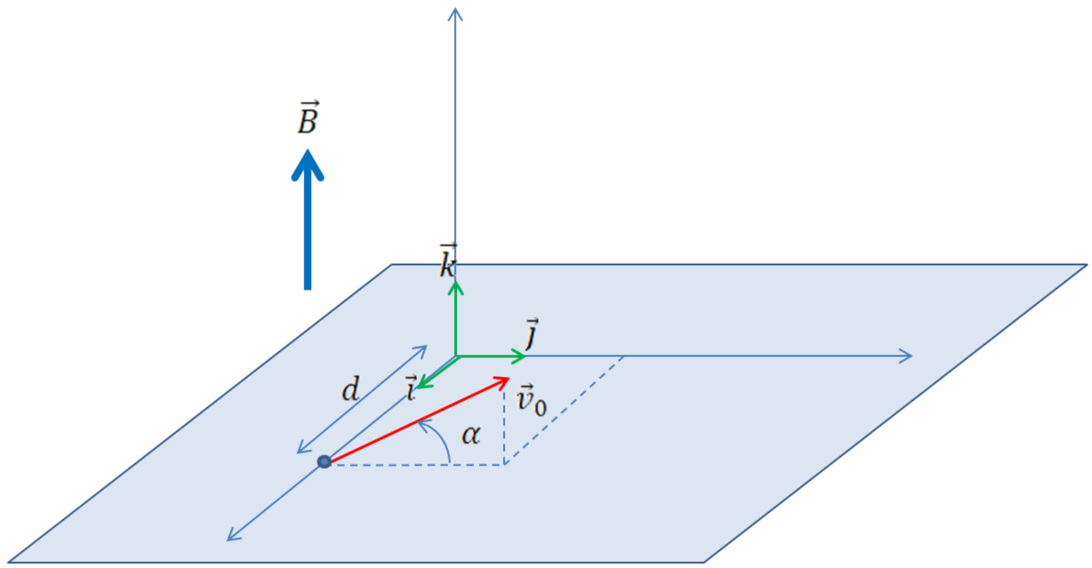
$$\vec{v}_0 = v_0 \left(cos(\alpha)\,\vec{\jmath} + sin(\alpha)\,\vec{k}\right)$$

Le champ magnétique est constant et vertical de formule :

$$\vec{B} = B\,\vec{k}$$

Le point d'entrée A de l'électron est défini par :

$$\overrightarrow{OA} = d\,\vec{\imath}$$



En appliquant la deuxième loi de Newton, établir les équations du mouvement de l'électron, tant qu'elle se trouve dans la zone de champ. La position de l'électron sera repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z)

Intégrer ces équations en tenant compte des conditions initiales

Montrer que le mouvement est hélicoïdal. En déterminer les caractéristiques, période, pas.

<u>Solution</u>

L'électron est soumis au cours de son mouvement à une force de Lorentz de la forme :

$$\vec{F} = -e\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

En appliquant la deuxième loi de Newton, on en déduit :

$$m\,\vec{a} = -e\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

soit en projection sur les trois axes :

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = -e\,B\,\dot{y} \\ m\,\ddot{y} = e\,B\,\dot{x} \\ m\,\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{e\,B}{m}\ \dot{y} \\ \ddot{y} = \dfrac{e\,B}{m}\,\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Et en intégrant la première et la troisième :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{e\,B}{m}\ y + K_1 \\ \ddot{y} = \dfrac{e\,B}{m}\,\dot{x} \\ \dot{z} = K_2 \end{cases}$$

Or les conditions initiales de vitesse s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = v_0\,cos(\alpha) \\ \dot{z}(0) = v_0\,sin(\alpha) \end{cases}$$

et celles de position :

$$\begin{cases} x(0) = d \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Il en résulte : $K_1 = 0, K_2 = v_0\,sin(\alpha)$ donc :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{e\,B}{m}\ y \\ \ddot{y} = \dfrac{e\,B}{m}\,\dot{x} \\ z = v_0\,sin(\alpha)\,t + K_3 \end{cases}$$

Puis $K_3 = 0$. On peut alors reporter la première équation dans la seconde :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{e\,B}{m}\ y \\ \ddot{y} = -\left(\dfrac{e\,B}{m}\right)^2\ y \\ z = v_0\ sin(\alpha)\ t \end{cases}$$

La seconde équation se résout sous la forme :

$$y = A\ cos(\omega_0\ t) + C\ sin(\omega_0\ t)$$

$$\dot{y} = -A\ \omega_0\ sin(\omega_0\ t) + C\ \omega_0\ cos(\omega_0\ t)$$

en posant :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{e\,B}{m}}$$

Les constantes A et B se déterminent à partir des conditions initiales qui donnent :

$$\begin{cases} A = 0 \\ C\ \omega_0 = v_0\ cos(\alpha) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{y = \frac{v_0}{\omega_0}\ cos(\alpha)\ sin(\omega_0\ t)}$$

En reportant dans la première du système, on déduit :

$$\dot{x} = -\frac{e\,B}{m}\ \frac{v_0}{\omega_0}\ cos(\alpha)\ sin(\omega_0\ t) = -\ v_0\ cos(\alpha)\ sin(\omega_0\ t)$$

En intégrant :

$$x = \frac{v_0}{\omega_0}\ cos(\alpha)\ cos(\omega_0\ t) + K_4$$

Et en appliquant la condition initiale :

$$d = K_4 + \frac{v_0}{\omega_0}\ cos(\alpha)$$

d'où :

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\omega_0}\ cos(\alpha)\ cos(\omega_0\ t) + d - \frac{v_0}{\omega_0}\ cos(\alpha)}$$

Posons :

$$\boxed{a = d - \frac{v_0}{\omega_0} \, cos(\alpha)}$$

alors les équations de la trajectoire sont :

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_0}{\omega_0} \, cos(\alpha) \, cos(\omega_0 \, t) + a \\ y = \dfrac{v_0}{\omega_0} \, cos(\alpha) \, sin(\omega_0 \, t) \\ z = v_0 \, sin(\alpha) \, t \end{cases}$$

Et considérant le point $\Omega(a, 0,0)$ on a :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega M} = \frac{v_0}{\omega_0} \, cos(\alpha) \, (cos(\omega_0 \, t) \, \vec{i} + sin(\omega_0 \, t) \, \vec{j}) + v_0 \, sin(\alpha) \, t \, \vec{k}}$$

La projection de M dans le plan $(0, x \, y)$ décrit donc à la vitesse angulaire ω_0 le cercle de centre Ω et de rayon R tel que :

$$\boxed{R = \frac{v_0}{\omega_0} \, cos(\alpha)}$$

La période de rotation est :

$$\boxed{T_0 = \frac{2 \, \pi}{\omega_0}}$$

Le mouvement est donc hélicoïdal et en une période la coordonnée verticale progresse d'une valeur appelée pas de l'hélice et valant :

$$\boxed{p = v_0 \, sin(\alpha) \, T_0 = \frac{2 \, \pi \, v_0 \, sin(\alpha)}{\omega_0}}$$