Enoncé

Dans ce problème, on va démontrer l'existence d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est telle que l'image de tout intervalle non vide et non réduit à un point est $\mathbb{R}$

Préliminaires :

1) **Montrer que :**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\, e^t\, dt$$

2) **Montrer que :**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\, e^t\, dt \leq \frac{e}{n!}$$

3) **En déduire :**

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Création de la fonction

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} tan(n!\ \pi\, x) \text{ si elle existe} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

4) **Soit $r \in \mathbb{Q}$, on pose :**

$$r = \frac{p}{q}\,, \quad (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$$

Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \ n \geq q \Rightarrow tan\big(n!\ \pi\,(x + r)\big) = tan(n!\ \pi\, x)$$

et en déduire que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, f est périodique de période r puis que la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est l'application nulle.

5) **Soit $y \in \mathbb{R}$**
   a) **Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $y = tan(\pi\, x)$**
   b) **On note pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{E[k\, x]}{k!}$$

Justifier que (U_n) est convergente. On notera pour la suite L sa limite.

6) **a) soit $k \geq n+3$, montrer que :**

$$n!\ \frac{E[k\,x]}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)\,(k-2)}$$

b) En déduire que pour $p > n+3$:

$$n!\ \sum_{k=n+2}^{p} \frac{E[k\,x]}{k!} \leq \frac{2}{n+1} - \frac{1}{p-1}$$

c) Conclure que :

$$\frac{E[(n+1)\,x]}{n+1} \leq n!\ (L - U_n) \leq \frac{E[(n+1)\,x]}{n+1} + \frac{2}{n+1}$$

Puis que :

$$\lim_{n\to+\infty} n!\ (L - U_n) = x$$

d) Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : n!\ U_n\ \in \mathbb{Z}$$

e) En déduire $f(L)$

7) **a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'ensemble $y + \mathbb{Q} = \{y + q, q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$**

b) En déduire :

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 :\ f([a,b]) = \mathbb{R}$$

Et conclure

Corrigé

1) première méthode :

Par récurrence en introduisant la proposition logique :

$$Q_n = "e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \, e^t \, dt "$$

Initialisation : pour $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} \, e^t \, dt = 1 + [e^t]_0^1 = 1 + e - 1 = e$$

Donc Q_0 est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que Q_n vraie alors :

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \, e^t \, dt$$

On procède à une intégration par partie en posant :

$$u'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!}, \qquad v(t) = e^t$$

$$u(t) = -\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad v'(t) = e^t$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \, e^t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \, e^t \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \, e^t \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \, e^t \, dt \end{aligned}$$

Donc Q_{n+1} vraie

Seconde méthode : On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0,1]$, f étant de classe c_{n+1} sur cet intervalle.

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!} \, f^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \, f^{(n+1)}(t) \, dt$$

Ce qui donne directement la formule souhaitée (A noter que la première méthode reprend le principe de démonstration de la formule de Taylor)

2) sur $[0,1]$ on a :

$$0 \leq 1 - t \leq 1, \qquad e^t \leq e$$

Donc :

$$0 \leq (1-t)^n \leq 1$$

$$0 \leq \frac{(1-t)^n}{n!}\ e^t \leq \frac{1}{n!}\ e$$

3) On déduit de ce qui précède :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\ e^t\ dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n!}\ e\ dt = \frac{e}{n!}$$

Donc en utilisant le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\ e^t\ dt = 0$$

Et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

<u>Remarque</u> :

Ce résultat peut être obtenu de façon plus directe en utilisant le développement en série entière de $f(x) = e^x$ en 1.

4) Rappelons, lorsque les tangentes sont définies :

$$tan(a+b) = \frac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)\ tan(b)}$$

Ainsi :

$$tan\big(n!\ \pi\ (x+r)\big) = tan(n!\ \pi\ x + n!\ \pi\ r) = \frac{tan(n!\ \pi\ x) + tan(n!\ \pi\ r)}{1 - tan(n!\ \pi\ x)\ tan(n!\ \pi\ r)}$$

Or, en posant $n! = q!\,m,\ m \in \mathbb{N}$:

$$tan(n!\ \pi\ r) = tan\left(n!\ \pi\ \frac{p}{q}\right) = tan\big((q-1)!\ \pi\ m\big) = 0$$

D'où :

$$tan\big(n!\ \pi\ (x+r)\big) = tan(n!\ \pi\ x)$$

Soit alors $r \in \mathbb{Q}$. Posons :

$$r = \frac{p}{q}, \quad (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$$

soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons deux cas :

1^er^ cas : $\lim\limits_{n \to +\infty} tan(n!\ \pi\ x)$ existe et est donc égale à $f(x)$

Dans ce cas, à partir du rang q on a :

$$tan\big(n!\ \pi\ (x + r)\big) = tan(n!\ \pi\ x)$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} tan\big(n!\ \pi\ (x + r)\big)$ existe et est égale à $f(x)$. Ainsi :

$$f(x + r) = f(x)$$

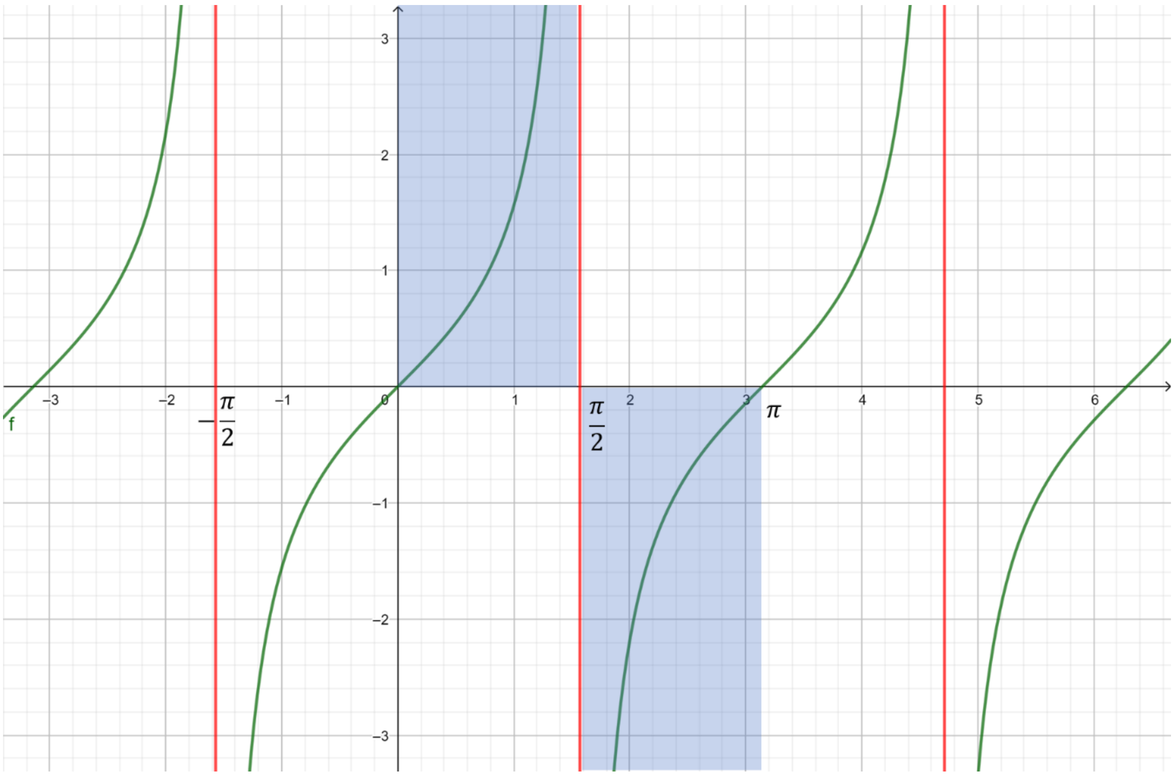
f est donc périodique de période r. De plus :

$$f(r) = f(0 + r) = f(0) = 0$$

Donc f s'annule sur l'ensemble des rationnels.

5)

a) Le graphique de la fonction tangente suggère la démarche à suivre



En effet, la fonction tangente définit une première bijection de $[0, \pi/2[$ dans $[0, +\infty[$ et une seconde bijection de $]\pi/2, \pi[$ dans $]-\infty, 0[$. Distinguons alors deux cas :

1^er^ cas : $y \geq 0$ alors $\exists\ z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[: y = tan(z)$

Et en posant :

$$x = \frac{z}{\pi} \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\subset [0,1[$$

on obtient :

$$y = tan(\pi\, x)$$

2ème cas : $y < 0$ alors $\exists\, z \in\ ]\pi/2, \pi[\ : y = tan(z)$

et en posant :

$$x = \frac{z}{\pi} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\subset [0,1[$$

on obtient :

$$y = tan(\pi\, x)$$

b) Distinguons deux cas :

1er cas : $x \geq 0$

La suite (U_n) est une série à termes positifs ou nuls. Elle est donc croissante. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$E[k\, x] \leq k\, x$$

Donc :

$$\frac{E[k\, x]}{k!} \leq \frac{k\, x}{k!} = \frac{x}{(k-1)!}$$

Et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{E[k\, x]}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{E[k\, x]}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(k-1)!} = x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \leq x\, e$$

La suite (U_n) est donc croissante et majorée. Elle est donc convergente

2ème cas : $x < 0$

La suite (U_n) est une série à termes négatifs. Elle est donc décroissante. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$k\, x < E[k\, x] + 1$$

Donc :

$$\frac{k\, x}{k!} < \frac{E[k\, x]}{k!} + \frac{1}{k!}$$

Et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(k-1)!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{E[k\, x]}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{E[k\, x]}{k!} + e$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(k-1)!} = x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \geq x\, e$$

Donc :

$$x\,e - e < \sum_{k=0}^{n} \frac{E[k\,x]}{k!}$$

La suite (U_n) est donc décroissante et minorée. Elle est donc convergente

6)

a) Soit $k \geq n+3$ alors $k-3 \geq n$ donc $(k-3)! \geq n!$ d'où

$$\frac{n!}{(k-3)!} \leq 1$$

$$\frac{n!}{(k-3)!\,(k-2)(k-1)k} \leq \frac{1}{(k-2)(k-1)k}$$

$$\frac{n!\;E[k\,x]}{k!} \leq \frac{E[k\,x]}{(k-2)(k-1)k} \leq \frac{k\,x}{(k-2)(k-1)k} \leq \frac{1}{(k-2)(k-1)} = \frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}$$

b) Soit $p > n+3$ alors

$$n! \sum_{k=n+2}^{p} \frac{E[k\,x]}{k!} = n!\frac{E[(n+2)\,x]}{(n+2)!} + \sum_{k=n+3}^{p} n!\;\frac{E[k\,x]}{k!}$$

$$\leq n!\frac{(n+2)\,x}{(n+2)!} + \sum_{k=n+3}^{p} \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right)$$

$$= \frac{x}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{p-1} = \frac{2}{n+1} - \frac{1}{p-1}$$

c) Par passage à la limite en faisant tendre p vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$n! \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{E[k\,x]}{k!} \leq \frac{2}{n+1}$$

Or :

$$n!\;(L - U_n) = n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{E[k\,x]}{k!} = n!\left(\frac{E[(n+1)\,x]}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{E[k\,x]}{k!}\right)$$

Donc :

$$\frac{E[(n+1)\,x]}{n+1} \leq n!\;(L - U_n) \leq n!\;\frac{E[(n+1)\,x]}{(n+1)!} + \frac{2}{n+1} = \frac{E[(n+1)\,x]}{n+1} + \frac{2}{n+1}$$

Soit encore :

$$x - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)\,x - 1}{n+1} \leq n!\;(L - U_n) \leq \frac{(n+1)\,x + 1}{n+1} + \frac{2}{n+1} = x + \frac{3}{n+1}$$

Ainsi, par théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} n!\;(L - U_n) = x$$

d) On a :

$$n!\ U_n = \sum_{k=0}^{n} n!\ \frac{E[k\ x]}{k!}$$

Or pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}, \qquad E[k\ x] \in \mathbb{Z}, \qquad n!\ \frac{E[k\ x]}{k!} \in \mathbb{Z}$$

Donc $n!\ U_n \in \mathbb{Z}$

e) On a :

$$\lim_{n \to +\infty} \pi\, n!\ (L - U_n) = \pi\, x$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} tan\big(\pi\, n!\ (L - U_n)\big) = tan(\pi\, x)$$

Or :

$$tan(\pi\, n!\, L\ - \pi\, n!\, U_n) = tan(\pi\, n!\, L)$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} tan(\pi\, n!\, L) = tan(\pi\, x)$$

D'où :

$$f(L) = tan(\pi\, x) = y$$

7)

a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$ posons :

$$a = y + c,\ \ b = y + d$$

$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel q tel que :

$$c < q < d$$

Donc :

$$y + c < y + q < y + d$$

Soit :

$$a < y + q < b$$

$y + \mathbb{Q}$ est donc dense dans $\mathbb{R}$

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$ et soit $y \in \mathbb{R}$ alors il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que :

$$y = f(L)$$

Or il existe un rationnel r tel que :

$$0 < r < b - a$$

Et il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$a < L + p\,r < b \qquad (1)$$

En effet

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a - L}{r} < p < \frac{b - L}{r}$$

L'existence de p est assurée par le fait que :

$$\frac{b - L}{r} - \frac{a - L}{r} = \frac{b - a}{r} > 1$$

Ainsi :

$$y = f(L) = f(L + p\,r)$$

Donc :

$$f([a, b]) = \mathbb{R}$$

Tout intervalle I non vide et non réduit à un point contenant un intervalle du type $[a, b]$ où $a < b$ on a donc :

$$f(I) = \mathbb{R}$$