# *Matrice compagnon*

Une matrice compagnon est une matrice carrée de la forme :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ & & & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Nous allons déterminer son polynôme caractéristique en commençant par des matrices d'ordre 2 et 3.

1) <u>Ordre 2</u>

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$P_C(X) = \begin{vmatrix} -X & a_0 \\ 1 & a_1 - X \end{vmatrix} = X^2 - a_1 X - a_0$$

2) <u>Ordre 3</u>

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$P_C(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & a_0 \\ 1 & -X & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 - X \end{vmatrix}$$

$$= -X \begin{vmatrix} -X & a_1 \\ 1 & a_2 - X \end{vmatrix} + a_0 \begin{vmatrix} 1 & -X \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -X\,(X^2 - a_2 X - a_1) + a_0 = -(X^3 - a_2 X^2 - a_1 X - a_0)$$

3) <u>Ordre quelconque</u>

Les formules aux ordres précédents suggèrent la conjecture sur $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ :

$$\forall \left(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}\right) \in \mathbb{K}^p \ ;$$

$$\begin{vmatrix} -X & & & & & a_0 \\ 1 & -X & & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & -X & a_{p-2} \\ & & & 0 & 1 & a_{p-1} - X \end{vmatrix} = (-1)^p \left( X^p - a_{p-1}\, X^{p-1} - \cdots - a_1\, X - a_0 \right)$$

Notons $Q(p)$ cette conjecture et prouvons-la par récurrence sur $p$.

L'initialisation a déjà été faite pour $p = 2$ et $p = 3$

Reste à voir l'hérédité. Supposons donc $Q(p)$ vraie pour $p \geq 2$ alors :

Soit $\left(a_0, a_1, \dots, a_p\right) \in \mathbb{K}^{p+1}$ , développons par rapport à la première ligne ce déterminant :

$$\begin{vmatrix} -X & & & & & a_0 \\ 1 & -X & & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & -X & a_{p-1} \\ & & & 0 & 1 & a_p - X \end{vmatrix}$$

$$= -X \begin{vmatrix} -X & & & & a_1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \\ & & & & \vdots \\ & & & -X & a_{p-1} \\ & & 0 & 1 & a_p - X \end{vmatrix}$$

$$= +(-1)^{p+2}\, a_0 \begin{vmatrix} 1 & -X & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ & 0 & & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & -X \\ & & & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -X\, (-1)^p \left( X^p - a_p\, X^{p-1} - \cdots - a_2\, X - a_1 \right) + (-1)^{p+2}\, a_0$$

$$= (-1)^{p+1} \left( X^{p+1} - a_p\, X^p - \cdots - a_2\, X^2 - a_1\, X - a_0 \right)$$

Donc $Q(p+1)$ est vraie ce qui achève la démonstration