Sorte de logarithme complexe :

On considère la série entière complexe :

$$L(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$$

1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série. On notera par la suite $D = \{z \in \mathbb{C} : \; |z| < R\}$

2) Donner une expression simple de cette série quand $z \in [-1, 1[$ et en déduire une expression simple de $exp\big(L(z)\big)$ dans ce cas

3) On considère, pour $t \in [0, 1]$ la fonction $f : t \to L(t\, z)$ et la fonction g définie par :

$$g(t) = (1 - t\, z)\; exp(f(t))$$

Montrer que f est bien définie et que g est constante sur $[0, 1]$ et en déduire une expression simple de $exp(L(z))$ pour $z \in D$.

4) On considère la série complexe de terme général $L(z^n)$. Montrer que cette série est absolument convergente sur D.

5) On pose pour $z \in D$:

$$P(z) = exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right)$$

Montrer que :

$$P(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - z^n}$$

6) On considère pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$U_N = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - z^n}$$

En développant en série entière chaque facteur du produit et en développant, montrer que U_N peut se mettre sous la forme :

$$U_N = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n,N}\, z^n$$

et définir précisément $p_{n,N}$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(p_{n,N}\right)_{N \geq 1}$ est croissante et constante à partir du rang n. On notera alors p_n cette valeur constante.

7) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_{n,0} = 0$ et on considère la série double :

$$\sum_{(n,N) \in \mathbb{N}^2} \left(p_{n,N+1} - p_{n,N}\right) z^n$$

Justifier que cette série est absolument convergente sur D puis en en calculant la somme de deux façons, montrer que :

$$\boldsymbol{P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, z^n}$$

8) Montrer que pour tout $\boldsymbol{t > 0}$ et tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{p_n = \frac{e^{n\,t}}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\,n\,\theta}\, P\left(e^{-t+i\,\theta}\right)\, d\theta}$$

<u>Réponses</u> :

1) Posons :

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Et appliquons la règle de D'alembert :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = 1$$

2) Rappelons le développement en série entière de la fonction Ln sur $]-1,1]$

$$Ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n}$$

Donc pour $z\ \in [-1,1[$

$$L(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -Ln(1-z)$$

$$exp\big(L(z)\big) = \frac{1}{1-z}$$

3) pour $t \in [0,1]$ et $z \in D$ on a $t\,z \in D$ donc f est bien définie. g est dérivable sur $[0,1]$ et :

$$g'(t) = -z\, exp\big(f(t)\big) + (1-t\,z)\, f'(t)\, exp(f(t))$$

Or :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n\, z^n}{n}$$

Et pour $t \in [0,1]$:

$$\left|\frac{n\, t^{n-1}\, z^n}{n}\right| \leq |z|^n$$

f est donc, à z fixé dans D, la somme d'une série de la variable t dont la série des dérivées converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$. Elle est donc dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme :

$$f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\,t^{n-1}\,z^n}{n}=z\sum_{n=1}^{+\infty}(t\,z)^{n-1}=z\,\frac{1}{1-t\,z}$$

Ainsi:

$$g'(t)=\big(-z\;+(1-t\,z)\,f'(t)\big)\,exp(f(t))=\left(-z\;+(1-t\,z)\,\frac{z}{1-t\,z}\right)\,exp(f(t))=0$$

Donc g est constante sur $[0,1]$ en particulier :

$$g(0)=g(1)$$

Soit :

$$(1-0)\,exp(f(0))=(1-z)\,exp(f(1))$$

Ce qui donne finalement :

$$exp(L(z))=\frac{1}{1-z}$$

4) Notons pour tout $z\in D$:

$$|L(z)|\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n}=-Ln(1-|z|)$$

Donc pour tout $z\in D,n\in\mathbb{N}:\ z^n\ \in D$ donc :

$$|L(z^n)|\le -Ln(1-|z|^n)$$

Or quand n tend vers l'infini on a :

$$-Ln(1-|z|^n)\sim|z|^n$$

La série de terme général $|z|^n$ converge donc celle de terme général $L(z^n)$ est absolument convergente.

5)

$$P(z)=\lim_{N\to+\infty}exp\left(\sum_{n=1}^{N}L(z^n)\right)=\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}exp(L(z^n))=\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-z^n}=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-z^n}$$

6)

$$U_N=\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-z^n}=\prod_{n=1}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}z^{k\,n}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{\,1\,n}\sum_{n=0}^{+\infty}z^{2\,n}\dots\sum_{n=0}^{+\infty}z^{N\,n}$$

$$=\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_N)\in\mathbb{N}^N}^{+\infty}z^{\,k_1+2\,k_2+\cdots+N\,k_N}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}\,z^n$$

où $p_{n,N}$ désigne le nombre de $N-$uplets $(k_1,k_2,\dots,k_N)$ d'entiers naturels tels que :

$$k_1+2\,k_2+\cdots+N\,k_N=n$$

Notons alors que si un N −uplets $(k_1, k_2, \dots, k_N)$ est tel que :

$$k_1 + 2\,k_2 + \cdots + N\,k_N = n$$

Alors le $N+1$ −uplets $(k_1, k_2, \dots, k_N, 0)$ est tel que :

$$k_1 + 2\,k_2 + \cdots + N\,k_N + (N+1)\,0 = n$$

Donc :

$$p_{n,N} \leq p_{n,N+1}$$

Or si $N > n$ et si :

$$k_1 + 2\,k_2 + \cdots + N\,k_N = n$$

alors pour tout $i \in [\![n+1, N]\!]$: $k_i = 0$ et donc :

$$p_{n,N} = p_{n,n}$$

7) Notons que

$$\sum_{(n,N)\in\mathbb{N}^2} \left|\left(p_{n,N+1} - p_{n,N}\right) z^n\right| \leq \sum_{(n,N)\in\mathbb{N}^2} \left(p_{n,N+1} - p_{n,N}\right) |z|^n$$

Et montrons que cette série double à termes positifs ou nuls converge en considérant d'abord à N fixé non nul :

$$\sum_{n=0}^{q} \left(p_{n,N+1} - p_{n,N}\right) |z|^n = \sum_{n=0}^{q} p_{n,N+1}\,|z|^n - \sum_{n=0}^{q} p_{n,N}\,|z|^n$$

quantité qui converge quand q tend vers l'infini vers :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(p_{n,N+1} - p_{n,N}\right) |z|^n = \prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-|z|^k} - \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-|z|^k}$$

Puis pour $N = 0$:

$$\sum_{n=0}^{q} \left(p_{n,1} - p_{n,0}\right) |z|^n = \sum_{n=0}^{q} |z|^n$$

quantité qui converge vers :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(p_{n,1} - p_{n,0}\right) |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$$

On considère alors

$$\sum_{N=0}^{M} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(p_{n,N+1} - p_{n,N}\right) |z|^n = \sum_{N=1}^{M} \left(\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-|z|^k} - \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-|z|^k} \right) + \frac{1}{1-|z|}$$

Quantité qui converge vers :

$$\sum_{N=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)|z|^n=\lim_{N\to+\infty}\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-|z|^k}-\prod_{k=1}^{1}\frac{1}{1-|z|^k}+\frac{1}{1-|z|}=P(|z|)$$

Donc la série double est absolument convergente et la démarche employée pour obtenir sa somme est analogue et conduit à :

$$\sum_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)z^n=P(z)$$

Or la somme peut être calculée par inversion des signes sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{N=0}^{+\infty}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(z^n\sum_{N=0}^{+\infty}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(z^n\left(\lim_{N\to+\infty}p_{n,N+1}-p_{n,0}\right)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n\,z^n$$

D'où :

$$P(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n\,z^n$$

8) Développons sous le signe intégral :

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\,n\,\theta}\,P\left(e^{-t+i\,\theta}\right)\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\,n\,\theta}\sum_{m=0}^{+\infty}p_m\,exp(-m\,t+i\,m\,\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}p_m\,exp(-m\,t+i\,(m-n)\,\theta)\,d\theta$$

Considérons alors la suite de fonctions :

$$f_m(\theta)=p_m\,exp(-m\,t+i\,(m-n)\,\theta)$$

Alors pour $\theta\in[-\pi,\pi]$:

$$|f_m(\theta)|=p_m\,e^{-m\,t}$$

Et pour $t>0$: $e^{-t}\in D$ donc la série de terme général $p_m\,(e^{-t})^n$ converge et donc la série de fonctions de terme général $f_m(\theta)$ converge normalement donc uniformément sur $[-\pi,\pi]$. On peut donc intégrer sous le signe somme :

$$I=\sum_{m=0}^{+\infty}p_m\int_{-\pi}^{\pi}exp(-m\,t+i\,(m-n)\,\theta)\,d\theta=\sum_{m=0}^{+\infty}p_m\,e^{-m\,t}\int_{-\pi}^{\pi}exp(i\,(m-n)\,\theta)\,d\theta$$

Or les intégrales pour lesquelles $m\neq n$ sont nulles donc :

$$I=p_n\,e^{-n\,t}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta=2\,\pi\,p_n\,e^{-n\,t}$$

D'où :

$$p_n = \frac{e^{n\,t}}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\,n\,\theta}\, P\left(e^{-t+i\,\theta}\right)\, d\theta$$