Inversion d'un polynôme de matrice nilpotente

Enoncé de l'exercice

Soit une matrice nilpotente d'ordre p, c'est-à-dire vérifant

$$\boldsymbol{A^p = 0}$$

Et :

$$\forall\, \boldsymbol{0 \leq k < p} : \quad \boldsymbol{A^k \neq 0}$$

Le but de l'exercice est de montrer dans un premier temps que la famille de matrices $(\boldsymbol{I}\ ;\ \boldsymbol{A}\ ;\ \boldsymbol{A^2};\ \cdots;\ \boldsymbol{A^{p-1}})$ **est libre, puis d'inverser les matrices de la forme :**

$$\boldsymbol{B = \lambda_0\, I + \lambda_1\, A + \lambda_2\, A^2 + \cdots + \lambda_{p-1}\, A^{p-1}}$$

Démarche

1) **Caractère libre de** $(\boldsymbol{I}\ ;\ \boldsymbol{A}\ ;\ \boldsymbol{A^2};\ \cdots;\ \boldsymbol{A^{p-1}})$

Partons de la nullité d'une combinaison linéaire :

$$\boldsymbol{\lambda_0\, I + \lambda_1\, A + \lambda_2\, A^2 + \cdots + \lambda_{p-1}\, A^{p-1} = 0}$$

Alors en multipliant successivement par $A^{p-1}, A^{p-2}, \cdots, A^1, A^0$, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \lambda_0\, A^{p-1} & & & & & = 0 \\ \lambda_0\, A^{p-2} + & \lambda_1\, A^{p-1} & & & & = 0 \\ \lambda_0\, A^{p-3} + & \lambda_1\, A^{p-2} & + \lambda_2\, A^{p-1} & & & = 0 \\ & & \vdots & & & \\ \lambda_0\, A^0 \quad + & \lambda_1\, A^1 \quad + & \cdots & & + \lambda_{p-1}\, A^{p-1} & = 0 \end{cases}$$

Comme toutes les puissances de A intervenant dans ce système sont des matrices non nulles, nous en déduisons qu'il conduit à :

$$\boldsymbol{\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0}$$

La famille est donc bien libre

2) Inversion des matrices B

Commençons par établir une condition nécessaire d'inversibilité de telles matrices en notant que :

$$B\, A^{p-1} = \lambda_0\, A^{p-1}$$

Donc, si B inversible, il existe une matrice C telle que :

$$B\, C = C\, B = I$$

Alors :

$$C\, B\, A^{p-1} = \lambda_0\, C\, A^{p-1}$$

Soit :

$$\boxed{A^{p-1} = \lambda_0\, C\, A^{p-1}}$$

Donc si $\lambda_0 = 0$: $A^{p-1} = 0$, ce qui est contradictoire.

Une condition nécessaire d'inversibilité est donc : $\boldsymbol{\lambda_0 \neq 0}$

Montrons qu'elle est suffisante en cherchant l'inverse de B sous une même forme, c'est-à-dire en cherchant un p-uplet $(\mu_0\ ;\ \mu_1\ ; \cdots ;\ \mu_{p-1})$ tel que :

$$\left(\lambda_0\, I + \lambda_1\, A + \lambda_2\, A^2 + \cdots + \lambda_{p-1}\, A^{p-1}\right)\left(\mu_0\, I + \mu_1\, A + \mu_2\, A^2 + \cdots + \mu_{p-1}\, A^{p-1}\right) = I$$

En développant et en considérant le caractère libre de la famille $(I\ ;\ A\ ;\ A^2\ ;\ \cdots ;\ A^{p-1})$, Nous sommes ramenés à un système en $(\mu_0\ ;\ \mu_1\ ; \cdots ;\ \mu_{p-1})$:

$$\begin{cases} \lambda_0\, \mu_0 & = 1 \\ \lambda_1\, \mu_0 + \lambda_0\, \mu_1 & = 0 \\ \lambda_2\, \mu_0 + \lambda_1\, \mu_1 + \lambda_0\, \mu_2 & = 0 \\ \qquad\qquad \vdots & \\ \lambda_{p-1}\, \mu_0 + \lambda_{p-2}\, \mu_1 + \cdots + \lambda_0\, \mu_{p-1} & = 0 \end{cases}$$

Or ce système a une matrice triangulaire avec des termes λ_0 non nuls sur la diagonale. Il est donc inversible, ce qui prouve que la matrice B l'est.