

Exercice 3

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\begin{cases} \forall (x, y) \neq (0, 0) & f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

1) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (coordonnées polaires).

Montrer que $|f(x, y)| \leq 2r^2 |\ln(r)|$. En déduire que f est continue.

2) Donner le signe de f en fonction de (x, y) . Faire un schéma des zones de $\mathbb{R}^2$ caractérisant le signe (strictement positif, strictement négatif, nul) de f .

3) Calculer les dérivées partielles de f . Indication : pour les dérivées partielles en $(0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y}.$$

Déterminer les points où les deux dérivées partielles s'annulent simultanément.

4.a) En utilisant la question 2) montrer que f n'admet pas d'extremum local aux points $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1), (0, 0)$.

4.b) On considère l'ensemble $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que f admet un minimum et maximum sur l'ensemble D . (On citera le théorème utilisé). En déduire que f admet un minimum local et un maximum local sur D . Donner leurs valeurs..

5) La fonction f admet-elle des extrema globaux ?

Corrigé :

1) f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par théorèmes généraux (produit, somme, composée). Il reste donc à étudier la continuité en $(0, 0)$. Soit donc $(x, y) \neq (0, 0)$ alors :

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |x| |y| \ln(x^2 + y^2) = r^2 |\cos(\theta)| |\sin(\theta)| |\ln(r^2)| \leq 2 r^2 |\ln(r)|$$

Or :

$$r = \|(x, y)\|_2$$

Et :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} 2 r^2 |\ln(r)| = 0$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\|(x, y)\|_2 < \alpha \Rightarrow |f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$$

Donc :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$$

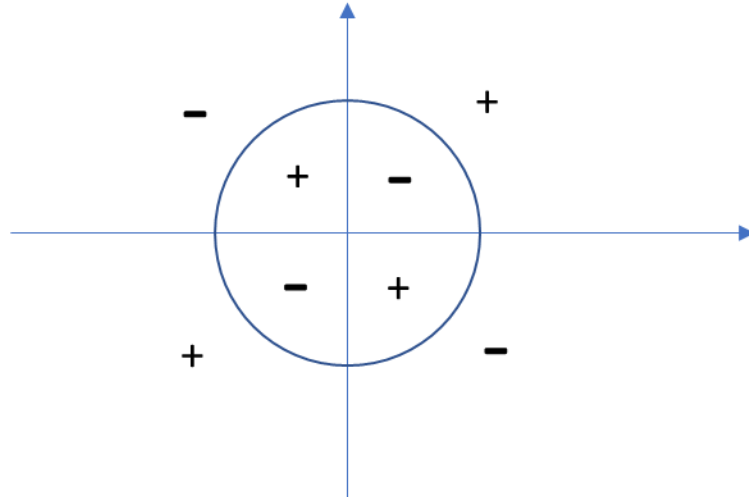
f est donc continue en $(0, 0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$

2) On a :

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1$$

$$f(x, y) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$



A noter les propriétés de symétrie :

$$f(x, y) = x y \ln(x^2 + y^2)$$

$$f(-x, y) = -f(x, y)$$

La nappe est symétrique par rapport à la droite (Oy)

$$f(x, -y) = -f(x, y)$$

La nappe est symétrique par rapport à la droite (Ox)

$$f(-x, -y) = f(x, y)$$

La nappe est symétrique par rapport à la droite (Oz)

3) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2 x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2 y^2 x}{x^2 + y^2}$$

Et pour $(x, y) = (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

Or pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0 \text{ ou } y = 0 \\ \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 0 \text{ ou } x = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0 \\ \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(2x^2) + 1 = 0 \\ x = y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = \frac{1}{e} \\ x = y \text{ ou } x = -y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}e} \text{ ou } x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}e} \text{ ou } x = -y = \frac{1}{\sqrt{2}e} \text{ ou } x = -y = -\frac{1}{\sqrt{2}e} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il y a donc 9 points en lesquels les deux dérivées partielles s'annulent simultanément :

$$\begin{aligned}
 & O(0,0), A\left(\frac{1}{\sqrt{2}e}, \frac{1}{\sqrt{2}e}\right), B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}e}, -\frac{1}{\sqrt{2}e}\right), C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}e}, \frac{1}{\sqrt{2}e}\right), D\left(\frac{1}{\sqrt{2}e}, -\frac{1}{\sqrt{2}e}\right), \\
 & E(1,0), F(-1,0), G(0,1), H(0,-1)
 \end{aligned}$$

4a)

Si f admet un extremum local en un point où elle admet deux dérivées partielles alors ces dérivées partielles sont nulles. Donc les points où il peut y avoir un extremum local sont parmi les 9 points déterminés à la question 3).

Toutefois aux points O, E, F, G la fonction s'annule en ces points et présente dans tout voisinage de ces points des points où elle est strictement positive et des points où elle est strictement négative. Elle ne peut donc avoir d'extremum local en ces points.

4b) $\mathcal{D}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ sur laquelle f est continue donc f admet sur $\mathcal{D}$ un maximum et un minimum qu'elle atteint. Or f s'annule sur la frontière de $\mathcal{D}$ et en $(0,0)$ donc ce minimum et ce maximum sont atteints en un point intérieur à $\mathcal{D} \setminus \{(0,0)\}$. Ce minimum et ce maximum sont donc locaux et les deux dérivées partielles sont nulles au point où il est atteint. On en déduit que le minimum est :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}e}, \frac{1}{\sqrt{2}e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

et qu'il est atteint en A et B

et le maximum :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}e}, -\frac{1}{\sqrt{2}e}\right) = -\frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

et qu'il est atteint en C et D

5)

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, x) = x^2 \ln(2x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x, x) = -x^2 \ln(2x^2) = -\infty$$

Donc f n'admet pas d'extremum absolu sur $\mathbb{R}^2$.