

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$$

1) On pose :

$$\forall t > 0, h(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

1.a) Déterminer la limite de la fonction h lorsque $t \xrightarrow[t>0]{} 0$.

1.b) Rappeler le développement en série entière de la fonction $t \mapsto e^t$.
En déduire que pour tout $t > 0$, $0 < h(t) < 1$.

2) Montrer que la fonction f est définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$.

3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4) Soit $x > 0$. Calculer $f(x-1) - f(x)$.

En déduire l'expression de $f(x)$ à l'aide d'une somme de série.

5) Aurait-on pu trouver le résultat précédent à l'aide du théorème d'intégration terme à terme ?

Corrigé :

1a)

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 1$$

1b) Le développement en série entière sur $\mathbb{R}$ de e^t est :

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$$

On en déduit :

$$\frac{e^t - 1}{t} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}$$
$$h(t) = \frac{1}{1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}}$$

Soit :

$$0 < h(t) < 1$$

2) L'intégrale a deux bornes impropres.

En $+\infty$:

$$\frac{t e^{-t x}}{e^t - 1} \sim t e^{-(x+1) t}$$

Si $x + 1 \geq 0$ l'intégrale diverge.

Si $x + 1 < 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t e^{-(x+1) t} = 0$$

D'après la règle de Riemann, l'intégrale converge

En 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t e^{-t x}}{e^t - 1} = 1$$

La fonction à intégrer est prolongeable par continuité, donc l'intégrale converge.

3) Sur $]0, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{t e^{-t x}}{e^t - 1} \leq e^{-t x}$$

Donc :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t x}}{e^t - 1} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t x} dt = \frac{1}{x}$$

On en déduit par comparaison

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

4) Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x-1) - f(x) &= \int_0^{+\infty} t \frac{(e^{-t(x-1)} - e^{-t x})}{e^t - 1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t x} (e^t - 1)}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} t e^{-t x} dt = \left[-t \frac{e^{-t x}}{x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t x}}{x} dt = \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(x+k-1) - f(x+k) &= \frac{1}{(x+k)^2} \\ f(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} f(x+k-1) - f(x+k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \end{aligned}$$