

Exercice 3

1) On considère l'équation différentielle :

$$xy' - 2y = x \quad (1)$$

1.a) Résoudre l'équation homogène associée sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

1.b) Vérifier qu'il existe une solution particulière de (1) de la forme : $y(x) = ax$, où a est un réel à déterminer.

1.c) Déterminer les solutions de (1) sur $\mathbb{R}$.

2) On considère l'équation différentielle :

$$xy' + 2y = x \quad (2)$$

2.a) Résoudre l'équation homogène associée sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

2.b) Vérifier qu'il existe une solution particulière de (2) de la forme : $y(x) = bx$, où b est un réel à déterminer.

2.c) Quelles sont les solutions de (2) sur $\mathbb{R}$?

3) On considère l'équation différentielle :

$$xy' - 2|y| = x \quad (E)$$

On suppose qu'il existe une solution f de (E) sur $\mathbb{R}$.

3.a) Déterminer $f(0)$.

3.b) Montrer que f est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

On pourra chercher d'abord le signe de f' .

3.c) Montrer que (E) n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.

Corrigé :

1a) sur $]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$ l'équation homogène équivaut à :

$$y' - \frac{2}{x} y = 0$$

Et la solution générale est de la forme :

$$y = c e^{2 \ln|x|} = c x^2$$

1b) recherche de solution particulière $y = a x$, $y' = a$

$$x a - 2 a x = x$$

Cette relation est vérifiée sur $\mathbb{R}$ pour $a = -1$

1c) Soit y une solution sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux constantes c et d telles que sur $]0, +\infty[$:

$$y = -x + c x^2$$

Et sur $] -\infty, 0[$:

$$y = -x + d x^2$$

Par continuité :

$$y(0) = 0$$

Réciproquement, une fonction de la forme précédente est solution de l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$, dérivable en 0 et dérivée égale à -1 et :

$$0 y'(0) - 2 y(0) = 0$$

Donc y est solution de l'équation différentielle en 0. Elle l'est donc sur $\mathbb{R}$

2a) sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$ l'équation homogène équivaut à :

$$y' + \frac{2}{x} y = 0$$

Et la solution générale est de la forme :

$$y = c e^{-2 \ln|x|} = \frac{c}{x^2}$$

2b) recherche de solution particulière $y = b x$, $y' = b$

$$x b + 2 b x = x$$

Cette relation est vérifiée sur $\mathbb{R}$ pour $b = \frac{1}{3}$

2c) Soit y une solution sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux constantes c et d telles que sur $]0, +\infty[$:

$$y = \frac{1}{3} x + \frac{c}{x^2}$$

Et sur $]-\infty, 0[$:

$$y = \frac{1}{3} x + \frac{d}{x^2}$$

y ayant une limite à gauche et une limite à droite en 0 qui est finie, on en déduit : $c = d = 0$.

Il n'y a donc qu'une unique solution sur $\mathbb{R}$, celle du 2b)

3a) $f(0) = 0$

3 b) : On a :

$$x f'(x) = 2 |f(x)| + x$$

Donc sur $]0, +\infty[$: $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et on a donc sur $]0, +\infty[$:

$$f(x) > f(0) = 0$$

3c) Sur $]0, +\infty[$ on a :

$$f'(x) - \frac{2}{x} f(x) = 1$$

Donc il existe une constante c telle que sur $]0, +\infty[: f(x) = -x + c x^2$

Ainsi :

$$f'(0) = -1$$

Donc il existe $\alpha < 0$ tel que sur $] \alpha, 0[:$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} < 0$$

Donc :

$$f(x) < 0$$

Donc f est solution sur $] \alpha, 0[$ de l'équation : $x y' + 2 y = x$ et donc sur $] \alpha, 0[:$

$$f(x) = \frac{1}{3} x$$

Donc le nombre dérivé à gauche en 0 de f est $\frac{1}{3}$ ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de solution sur $\mathbb{R}$.