Exercice 2

Dans tout l'exercice, on note f la fonction définie par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$$

On ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(x)$.

1.a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
Minorer $\frac{1}{t}$, pour t appartenant à $[1, x]$, puis montrer ensuite que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) \geqslant \frac{e^x - e}{x}$$

1.b) En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Dans la suite, on se propose de trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2.a) Soit g la fonction définie par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, g(t) = \frac{e^t}{t^3}$$

Calculer $g'(t)$. Déterminer le tableau de variation de g.
2.b) En déduire l'encadrement :

$$0 \leqslant \int_1^3 g(t)dt \leqslant 2e$$

2.c) Montrer que :

$$\forall x \geqslant 3, \quad 0 \leqslant \int_3^x g(t)\ dt \leqslant \frac{x-3}{x^3}e^x$$

3.a) Montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\ dt$$

3.b) Etablir l'égalité suivante :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_1^x g(t)dt$$

4.a) A l'aide des questions précédentes, déterminer un encadrement de $f(x)$, valable pour tout réel x appartenant à $[3, +\infty[$.
4.b) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

Corrigé :

1a) Soit $x \geq 1$. Sur $[1, x]$ on a :

$$\frac{e^t}{x} \leq \frac{e^t}{t}$$

Donc :

$$\int_1^x \frac{e^t}{x}\ dt \leq \int_1^x \frac{e^t}{t}\ dt$$

$$\frac{e^x - e}{x} \leq f(x)$$

1b) On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e}{x} = +\infty$$

Donc par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2a) Pour $t \in [1, +\infty[$:

$$g(t) = \frac{e^t}{t^3}$$

$$g'(t) = \frac{t^3\, e^t - 3\, t^2\, e^t}{t^6} = \frac{t-3}{t^4}\; e^t$$

Donc :

$$g'(t) > 0 \; sur \; [1{,}3[, \qquad g'(t) > 0 \; sur \;]3, +\infty[$$

De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} g(t) = +\infty\, , g(1) = e$$

g est strictement décroissante sur $[1{,}3]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$ et présente un minimum en 3 égal à :

$$g(3) = \frac{e^3}{27}$$

2b) sur $[1{,}3]$ on a : $0 \leq g(t) \leq e$ donc :

$$0 \leq \int_1^3 g(t)dt \leq 2\, e$$

2c) Pour $x \geq 3$ on a :

$$0 \leq \int_3^x g(t)dt \leq \int_3^x g(x)dt = \frac{x-3}{x^3}\; e^x$$

3a) En intégrant par partie :

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\; e^t\; dt = \left[\frac{1}{t}\; e^t\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\; e^t\; dt$$

$$= \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{1}{t^2}\; e^t\; dt$$

3b) En intégrant à nouveau par partie :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \left[\frac{1}{t^2}\; e^t\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{1}{t^3}\; e^t\; dt$$

$$= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\, e + 2\int_1^x \frac{1}{t^3}\; e^t\; dt$$

4a)

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\, e + 2\, \int_1^3 g(t)dt + 2\, \int_3^x g(t)dt$$

$$\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}-2\,e \leq f(x) \leq \frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}-2\,e+4e+2\frac{x-3}{x^3}\ e^x$$

$$\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}-2\,e \leq f(x) \leq \frac{e^x}{x}+3\frac{e^x}{x^2}-3\ \frac{e^x}{x^3}+2\,e$$

Or en $+\infty$:

$$\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}-2\,e \sim \frac{e^x}{x} \sim \frac{e^x}{x}+3\frac{e^x}{x^2}-3\ \frac{e^x}{x^3}+2\,e$$

On en déduit :

$$f(x) \sim \frac{e^x}{x}$$