Exercice 5

Soit $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Rappeler la limite, finie ou infinie de $(H_n)_{n\geq 1}$. (On ne demande pas de démonstration.)

2.a) Soit x un réel positif ou nul fixé. Montrer que la fonction $u \mapsto \frac{1-(1-u)^x}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.

On pose, pour tout réel $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u} du$.

2.b) Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2.c) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x+1) - F(x)$. En déduire la valeur de $F(n)$ en fonction de H_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Pour $x \geq 0$ et $t \in]0,1[$, on pose $g(x,t) = \frac{t^x - 1}{\ln t}$.

3.a) Montrer que la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $G(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$.

3.b) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. Calculer G' puis G.

4) On admettra que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} G(x)$. En déduire un équivalent de H_n lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé :

1) Posons $g(t) = \frac{1}{t}$. Cette fonction étant positive et décroissante sur $[1, +\infty[$ la série de terme général $g(n)$ est du point de vue de la convergence de même nature que l'intégrale $\int_1^X g(t)dt = Ln(X)$ qui tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

2) a) Posons sur $]0,1[$ pour x fixé :

$$f(u) = \frac{1-(1-u)^x}{u}$$

f est continue sur $]0,1[$ et :

$$\lim_{u\to 1^-} f(u) = 1$$

En 0 :

$$f(u) = \frac{1 - e^{x\,Ln(1-u)}}{u} \sim - \frac{x\,Ln(1-u)}{u} \sim x$$

Donc f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et le prolongement est intégrable au sens de Riemann sur le même intervalle.

2 b) Posons pour u fixé dans $]0,1[$:

$$\varphi(x) = \frac{1-(1-u)^x}{u} = \frac{1 - e^{x\,Ln(1-u)}}{u}$$

φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et :

$$\varphi'(x) = -\frac{Ln(1-u)\,e^{x\,Ln(1-u)}}{u} \geq 0$$

φ est donc croissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi si $0 \leq x < y$ alors :

$$\forall u \in\,]0,1[\, : \frac{1-(1-u)^x}{u} \leq \frac{1-(1-u)^y}{u}$$

Donc :

$$\forall\,(t,t') \in\,]0,1[^2 : t < t' \Rightarrow \int_t^{t'} \frac{1-(1-u)^x}{u}du \leq \int_t^{t'} \frac{1-(1-u)^y}{u}du$$

Par passage à la limite en 0 et en 1, on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}du \leq \int_0^1 \frac{1-(1-u)^y}{u}du$$

Donc F est croissante sur $[0,+\infty[$

2 c)

$$F(x+1) - F(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^x - (1-u)^{x+1}}{u}du = \int_0^1 (1-u)^x\,\frac{1-(1-u)}{u}du$$

$$= \int_0^1 (1-u)^x\,du = \left[-\frac{(1-u)^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+1}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F(n) - F(n-1) = \frac{1}{n}$$

Et :

$$\sum_{k=1}^{n}\big(F(k) - F(k-1)\big) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Soit, en ayant reconnu une somme télescopique :

$$F(n) - F(0) = H_n$$

D'où, en notant que $F(0) = 0$:

$$F(n) = H_n$$

3 a) à x fixé : :

$$\lim_{t \to 0^+} g(x,t) = 0$$

En 1 :

$$g(x,t) = \frac{e^{x\, Ln(t)} - 1}{Ln(t)} \sim \frac{x\, Ln(t)}{Ln(t)} \sim x$$

Donc :

$$\lim_{t \to 1^-} g(x,t) = x$$

La fonction g de la variable t à x fixé est donc prolongeable par continuité en 0 et en 1.

3 b) On a :

$$G(x) = \int_0^1 g(x,t)\, dt$$

g étant une fonction de deux variables continue sur $[0, +\infty[\times [0,1]$ et dérivable par rapport à sa première variable à dérivée continue sur le même domaine avec :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{Ln(t)\, e^{x\, Ln(t)}}{Ln(t)} = e^{x\, Ln(t)} = t^x$$

Donc G est dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

$$G'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\, dt = \int_0^1 t^x\, dt = \frac{1}{x+1}$$

On en déduit , par intégration :

$$G(x) = G(0) + Ln(x+1) = Ln(x+1)$$

4)

$$H_n = F(n) \sim G(n) = Ln(n+1)$$

Donc :

$$H_n \sim Ln(n)$$