Exercice 3
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies par :*

$$u_1 = 1, \text{ et pour } n \geqslant 2, u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right); v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

1) Rappeler le domaine de définition de la fonction :

$$x \mapsto x + \ln(1 - x)$$

Etudier ses variations sur l'intervalle $[0, 1[$.

Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 *en* 0.

2) Soit n *un entier naturel non nul.*
Quel est le signe de u_n *?*

3) Justifier que la série de terme général u_n *est convergente.*

4) Etudier la fonction :

$$f:\ x \mapsto x - \ln(1+x)$$

sur l'intervalle $[0,1]$.

5) Justifier que la série de terme général v_n *est convergente.*

6) Soit n *un entier naturel non nul.*
Exprimer $v_n - u_n$ *en fonction de* n.
En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{N}(v_n - u_n)$ *en fonction de l'entier naturel* N, *pour* $N \geqslant 3$.

7) Que peut-on dire des suites $\left(\sum_{n=1}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ *?*

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Dans la suite de l'exercice, on notera γ *la somme commune des séries* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

8) Pour tout entier naturel n *non nul, on pose :*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante.*

On pourra par exemple considérer $A_n - A_{n-1}$ *pour* $n \geqslant 2$.

9) Exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *en fonction des termes de la suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente de limite* γ.

Corrigé

1) $f: x \to x + Ln(1-x)\ D_f =]-\infty, 1[$

f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = -\frac{x}{1-x}$$

f' est donc négative ou nulle sur $[0,1[$ et ne s'annule qu'en un point isolé 0, donc f est strictement décroissante sur $[0,1[$. De plus :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty\,,\ \ f(0) = 0$$

Donc f est strictement négative sur $]0,1[$ et en 0 :

$$f(x) = x + (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + o((-x)^2)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

2)

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

3)

$$u_n = -\frac{1}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim = -\frac{1}{2\,n^2}$$

Or la série de terme général $-\frac{1}{2\,n^2}$ converge donc la série de terme général u_n converge.

4) $g{:}\,x \to x - Ln(1+x)\ D_f =]-1,+\infty[$

g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1-x}$$

g' est donc positive ou nulle sur $]0,1]$ et ne s'annule qu'en un point isolé 0, donc g est strictement croissante sur $]0,1]$. De plus :

$$g(0) = 0$$

Donc g est strictement positive sur $]0,1]$ et en 0 :

$$g(x) = x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Or :

$$v_n = g\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

5) On a :

$$v_n = \frac{1}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim = \frac{1}{2\,n^2}$$

Or la série de terme général $\frac{1}{2\,n^2}$ converge donc la série de terme général v_n converge.

6)

$$v_1 - u_1 = -Ln(2)$$

Pour $n \geq 2$:

$$v_n - u_n = -Ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - Ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -Ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= Ln\left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right) = Ln\left(\frac{n\,n}{(n+1)\,(n-1)}\right)$$

$$= Ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - Ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

On en déduit la somme télescopique pour $N \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^{N}(v_n - u_n) = v_1 - u_1 + \sum_{n=2}^{N}(v_n - u_n)$$

$$= -Ln(2) + \sum_{n=1}^{N}\left(Ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - Ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = -Ln(2) + Ln\left(\frac{N}{N+1}\right) - Ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$Ln\left(\frac{N}{N+1}\right)$$

7) On a :

$\sum_{n=1}^{N} u_n$ est décroissante, $\sum_{n=1}^{N} v_n$ est croissante et :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n - \sum_{n=1}^{N} u_n = \lim_{N\to\infty}\ Ln\left(\frac{N}{N+1}\right) = 0$$

Donc les deux suites sont adjacentes. Elles admettent donc une même limite γ

8) pour $n \geq 2$ on a :

$$A_n - A_{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - Ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + Ln(n-1) = \frac{1}{n} + Ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = u_n < 0$$

Donc la suite(A_n) est strictement décroissante

9) pour $N \geq 2$ on a :

$$\sum_{n=2}^{N}(A_n - A_{n-1}) = \sum_{n=2}^{N} u_n$$

Donc :

$$A_N - A_1 = \sum_{n=2}^{N} u_n$$

$$A_N - A_1 + u_1 = \sum_{n=1}^{N} u_n$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} u_n = A_N, \quad \lim_{N\to\infty} A_N = \gamma}$$