Exercice 1

On considère quatre nombres complexes a, b, c, d tels que $a^2 + b^2 \neq 0$, et la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

1) Déterminer un scalaire m , en fonction de a, b, c, d , tel que :

$$A {}^t A = m I_4$$

(On rappelle que ${}^t A$ désigne la matrice transposée de A , et I_4 désigne la matrice unité d'ordre 4.)

- 2) En déduire une expression de $\det(A)$ en fonction de a, b, c, d .
- 3) Montrer que $\text{rg}(A)$ est égal à 2 ou 4 et préciser votre réponse.
- 4) Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
- 5) On suppose que $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$.

Montrer qu'il existe deux scalaires r et s tels que :

$$A^2 = rA + sI_4$$

et déterminer r et s .

Corrigé :

- 1) Notons tout d'abord que le terme b_{ij} de la matrice $A {}^t A$ est le produit scalaire des lignes i et j de A . Or le produit scalaire de deux lignes distinctes de A est nul et le produit scalaire d'une ligne avec elle-même, autrement dit sa norme vaut $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Donc :

$$A {}^t A = m I_4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m$$

- 2) On a d'une part :

$$\det(A {}^t A) = \det(A) \det({}^t A) = \det(A) \det(A) = (\det(A))^2$$

d'autre part :

$$\det(A {}^t A) = \det(m I_4) = m^4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

Il en résulte :

$$(\det(A))^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 = ((a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2)^2$$

Or, à b, c, d fixés, $\det(A)$ est un polynôme de degré 4 en a de terme dominant a^4 donc de la forme :

$$\det(A) = a^4 + P(b, c, d) a^3 + Q(b, c, d) a^2 + R(b, c, d) a + S(b, c, d)$$

Où P, Q, R, S sont des polynômes des trois variables b, c, d . Or, si deux polynômes de la variable a ont leurs carrés égaux, alors ils sont égaux ou opposés et s'ils ont en plus même terme dominant, ils sont égaux. Ainsi :

$$\text{Det}(A) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

3) Distinguons deux cas :

1^{er} cas : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$

Dans ce cas, $\text{Det}(A) \neq 0$ et $\text{rg}(A) = 4$

2^{ème} cas : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$

Nous commencerons par une première méthode avant de présenter une seconde méthode plus rapide suggérée par un candidat nommé Richard.

Nous avons $\text{Det}(A) = 0$ donc $\text{rg}(A) \leq 3$

Or on a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$

Donc les deux premiers vecteurs colonne de A sont libres et $\text{rg}(A) \geq 2$.

Montrons maintenant que le troisième vecteur colonne est lié aux deux premiers en cherchant d'abord un couple (x, y) de complexes tels que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix}$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a c + b d \\ b c - a d \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -c & d \\ -d & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -c(a c + b d) + d(b c - a d) \\ -d(a c + b d) - c(b c - a d) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -a c^2 - b c d + b c d - a d^2 \\ -a c d - b d^2 - b c^2 + a c d \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -a(c^2 + d^2) \\ -b(c^2 + d^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$x \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -d \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

On fait un travail analogue pour montrer que le quatrième vecteur colonne est lié aux deux premiers en cherchant un couple (z, t) tel que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix}$$

On trouve, après calculs :

$$\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a d - b c \\ b d + a c \end{pmatrix}$$

Et on vérifie :

$$z \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$$

Ainsi $rg(A) = 2$

Voyons la seconde méthode, qui sera utile également à la question suivante :

Nous reprenons le début où on constate que les deux premières colonnes de la matrice sont libres donc :

$$2 \leq rg(A)$$

Or nous avons :

$$A {}^tA = 0$$

Donc :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C}) : A ({}^tA X) = 0$$

D'où :

$$Im({}^tA) = \{{}^tA X : X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})\} \subset Ker(A)$$

Or, une matrice ayant même rang que sa transposée :

$$Dim(Im({}^tA)) = rg({}^tA) = rg(A)$$

Donc :

$$2 \leq rg(A) \leq dim(Ker(A))$$

Et, en utilisant le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = 4$$

Donc :

$$\dim(\text{Ker}(A)) = \text{rg}(A) = 2$$

4) Le polynôme caractéristique de A est le déterminant d'une matrice de même forme que A . Donc :

$$P_A(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I_4) = ((a - \lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

Les valeurs propres de A sont les racines complexes de ce polynôme.

Voyons là encore deux méthodes, la seconde étant plus rapide (celle inspirée par Richard)

1^{ère} méthode :

Distinguons plusieurs cas :

1^{er} cas : $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (a - \lambda)^2 = -(b^2 + c^2 + d^2)$$

$P_A(\lambda)$ admet alors deux racines distinctes λ_1 et λ_2 . Distinguons alors deux sous cas :

Sous-cas 1 : $c^2 + d^2 \neq 0$

Dans ce cas, on a à la fois : $(a - \lambda_1)^2 + b^2 \neq 0$ et $(a - \lambda_2)^2 + b^2 \neq 0$

Or, d'après l'étude faite en 3) le rang de $A - \lambda_1 I_4$ est 2 ou 4

Supposons par l'absurde que ce rang soit 4 alors le noyau de $A - \lambda_1 I_4$, qui est également le sous espace propre associé à λ_1 serait réduit au vecteur nul, ce qui est contradictoire, donc le rang de $A - \lambda_1 I_4$ est 2 et la dimension du sous espace propre E_{λ_1} est 2.

Par un raisonnement analogue, la dimension du sous espace propre E_{λ_2} associé à λ_2 est 2. Ainsi :

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) = 4$$

Donc A est diagonalisable

Sous-cas 2 : $c^2 + d^2 = 0$ soit $c = i d$ ou $c = -i d$

Dans ce cas $b \neq 0$ et :

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (a - \lambda)^2 = -b^2$$

On a donc :

$$\lambda_1 = a - i b, \quad \lambda_2 = a + i b$$

Traitons le cas : $c = i d$:

$$A - \lambda_1 I_4 = \begin{pmatrix} i b & b & i d & d \\ -b & i b & -d & i d \\ -i d & d & i b & -b \\ -d & -i d & b & i b \end{pmatrix}$$

On note alors que la deuxième ligne de cette matrice s'obtient en multipliant la première par i . De même la quatrième en multipliant la troisième par $-i$. Le rang de cette matrice est donc le rang de ses deux vecteurs ligne 1 et 3 qui sont libres en considérant les mineurs :

$$\begin{vmatrix} i b & b \\ -i d & d \end{vmatrix} = 2 i b d, \quad \begin{vmatrix} b & i d \\ d & i b \end{vmatrix} = i (b^2 - d^2)$$

L'un des deux est en effet non nul car $b \neq 0$

Ainsi :

$$rg(A - \lambda_1 I_4) = 2$$

Une même analyse conduit à :

$$rg(A - \lambda_2 I_4) = 2$$

Et A est diagonalisable

Traitons le cas : $c = -i d$:

$$A - \lambda_1 I_4 = \begin{pmatrix} i b & b & -i d & d \\ -b & i b & -d & -i d \\ i d & d & i b & -b \\ -d & i d & b & i b \end{pmatrix}$$

On note alors que la deuxième colonne de cette matrice s'obtient en multipliant la première par $-i$. De même la quatrième en multipliant la troisième par i . Le rang de cette matrice est donc le rang de ses deux vecteurs colonne 1 et 3 qui sont libres en considérant les mineurs :

$$\begin{vmatrix} i b & -i d \\ -b & -d \end{vmatrix} = -2 i b d, \quad \begin{vmatrix} -b & -d \\ i d & i b \end{vmatrix} = -i (b^2 - d^2)$$

L'un des deux est en effet non nul car $b \neq 0$

Ainsi :

$$\text{rg}(A - \lambda_1 I_4) = 2$$

Et de façon analogue :

$$\text{rg}(A - \lambda_2 I_4) = 2$$

Et A est diagonalisable

2ème cas : $b^2 + c^2 + d^2 = 0$

$$P_A(\lambda) = (a - \lambda)^2$$

$P_A(\lambda)$ admet alors une seule racine a

Nous allons montrer qu'il existe une configuration non diagonalisable. Prenons :

$$(a, b, c, d) = (0, 1, 0, i)$$

On a alors :

$$a^2 + b^2 = 1 \neq 0$$

$$b^2 + c^2 + d^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

A admet pour seule valeur propre 0 et n'est pas la matrice nulle. Elle n'est donc pas diagonalisable. Il semble donc qu'il y ait une erreur d'énoncé

2ème méthode :

1^{er} cas : $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$

Dans ce cas, A admet deux valeurs propres distinctes et en notant que pour une valeur propre λ , la matrice $A - \lambda I_4$ est de même forme que A et de déterminant nul, on en déduit d'après 3) que le rang de cette matrice est 2 et donc que le sous-espace propre associé à λ qui est son noyau est de dimension 2. Ainsi la somme des dimensions des deux sous-espaces propres est égale à 4 et A est diagonalisable.

2^{ème} cas : $b^2 + c^2 + d^2 = 0$

Dans ce cas, A admet pour seule valeur propre a et comme le sous-espace propre associé est de dimension 2, elle n'est pas diagonalisable, ce qui confirme l'erreur (ou plutôt l'imprécision) d'énoncé mentionnée précédemment.

5) $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 2(A - 3I_4)$$

$$A^2 = 2A - 4I_4$$

6) Introduisons la proposition logique, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$P_p: " \exists (a_p, b_p) \in \mathbb{Z}^2 : A^p = a_p A + b_p I_4 "$$

Montrons que P_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par récurrence :

Initialisation : pour $p = 0$ et $p = 1$:

$$A^0 = 0A + 1I_4$$

$$A^1 = 1A + 0I_4$$

Donc :

$$(a_0, b_0) = (0, 1)$$

$$(a_1, b_1) = (1, 0)$$

Hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que P_p soit vraie alors :

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A A^p = A (a_p A + b_p I_4) = a_p A^2 + b_p A \\ &= a_p (2A - 4I_4) + b_p A = (2a_p + b_p) A - 4a_p I_4 \end{aligned}$$

Donc P_{p+1} est vraie en posant :

$$a_{p+1} = 2a_p + b_p$$

$$b_{p+1} = -4a_p$$

On en déduit pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$a_{p+2} = 2a_{p+1} - 4a_p$$

L'équation caractéristique de cette relation de récurrence linéaire est :

$$\begin{aligned}q^2 &= 2q - 4 \\ \Leftrightarrow (q - 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow q &= 2\end{aligned}$$

On en déduit :

$$a_p = (A + Bp) 2^p$$

A, B étant déterminés par le système :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} A = 0 \\ 2B = 1 \end{cases}$$

D'où :

$$\forall p \in \mathbb{N} : a_p = p 2^{p-1}$$

On en déduit :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : b_p = -4 a_{p-1} = -4 (p - 1) 2^{p-2} = -(p - 1) 2^p$$

La formule restant valable pour $p = 0$