Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\ dt$$

1) Montrer que f est définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

2) Montrer que f est de classe C^1 et préciser son sens de variation.

3) Déterminer une fonction g telle que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f(x+2) = g(x)f(x)$$

4) On considère la fonction h définie par :

$$\forall x > 0, h(x) = xf(x)f(x-1)$$

Montrer que :

$$\forall x > 0, h(x+1) = h(x)$$

Calculer $h(n)$ pour tout entier n naturel non nul.

5) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers -1.

6) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

<u>Corrigé</u> :

1) On a :

$$sin^x(t) = e^{x\,Ln(sin(t))}$$

La fonction à intégrer est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable au sens de Riemann sur tout sous intervalle de cet ensemble. Le problème de la convergence de l'intégrale impropre se pose en 0. Or en 0 :

$$e^{x\,Ln(sin(t))} = e^{x\,Ln(t+o(t))}$$

$$= e^{x\,Ln(t)+\,Ln(1+o(1))} = e^{x\,Ln(t)}\ e^{x\,Ln(1+o(1))}$$

$$\sim\ t^x = \frac{1}{t^{-x}}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale impropre converge est donc :

$$-x < 1$$

Soit :

$$x > -1$$

f est donc bien définie sur $]-1;+\infty[$

2) Définissons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} sin^x(t)\, dt$$

La suite de fonctions $f_n(x)$ tend simplement sur$]-1;+\infty[$ vers $f(x)$

Or $g(x,t) = sin^x(t)$ est une fonction de deux variables continue sur $]-1;+\infty[\times \left[\frac{1}{n};\frac{\pi}{2}\right]$ et admet sur ce domaine une dérivée partielle continue qui est :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = Ln\big(sin(t)\big)\ sin^x(t)$$

Donc $f_n(x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et :

$$f_n{}'(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} Ln\big(sin(t)\big)\, sin^x(t)\, dt$$

Or en 0 :

$$Ln\big(sin(t)\big)\, sin^x(t) = Ln\big(t + o(t)\big)\, sin^x(t)$$

$$= \big(Ln(t) + Ln(1 + o(1))\big)\, sin^x(t) \sim\ Ln(t)\, t^x = \frac{Ln(t)}{t^{-x}}$$

Donc l'intégrale impropre est convergente. Ainsi $f_n{}'(x)$ tend simplement sur $]-1;+\infty[$ vers la fonction :

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln\big(sin(t)\big)\, sin^x(t)\, dt$$

Soient $a < b$ tels que $[a;b] \subset]-1;+\infty[$ montrons que la convergence précédente est uniforme sur $[a;b]$ en considérant :

$$|f_n'(x) - g(x)| = \left| \int_0^{\frac{1}{n}} Ln\big(sin(t)\big)\, sin^x(t)\, dt \right|$$

$$|f_n'(x) - g(x)| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \left|Ln\big(sin(t)\big)\right| e^{x\, Ln\left(sin(t)\right)}\, dt$$

Or sur $[a; b]$:

$$x\, Ln\big(sin(t)\big) \leq a\, Ln\big(sin(t)\big)$$

donc :

$$e^{x\, Ln\left(sin(t)\right)} \leq e^{a\, Ln\left(sin(t)\right)}$$

Donc :

$$|f_n'(x) - g(x)| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \left|Ln\big(sin(t)\big)\right| e^{a\, Ln\left(sin(t)\right)}\, dt = \int_0^{\frac{1}{n}} \left|Ln\big(sin(t)\big)\right| e^{a\, Ln\left(sin(t)\right)}\, dt$$

La quantité majorante étant indépendante de x et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini, la convergence est uniforme sur $[a; b]$. On en déduit que f est dérivable sur $[a; b]$ et que :

$$f'(x) = g(x)$$

De plus $f_n'(x)$ étant continue sur $[a; b]$ la limite uniforme de cette suite de fonctions est continue sur $[a; b]$ ce qui montre que f est de classe C_1 sur $[a; b]$ donc sur $]-1; +\infty[$

Or sur $\left[\frac{1}{n}; \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$Ln\big(sin(t)\big)\, sin^x(t) \leq 0$$

Et cette dernière fonction est continue et non identiquement nulle, on en déduit :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} Ln\big(sin(t)\big)\, sin^x(t)\, dt < 0$$

D'autre part, cette suite est décroissante, donc sa limite est strictement négative. Ainsi :

$$f'(x) < 0$$

f est donc strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$

3) On a sur $]-1; +\infty[$:

$$f(x+2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{x+2}(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\, sin^{x+1}(t)\, dt$$

Faisons une intégration par partie en posant :

$$u'(t) = sin(t), \qquad u(t) = -cos(t)$$

$$v(t) = sin^{x+1}(t), \qquad v'(t) = (x+1)\, sin^{x}(t)\, cos(t)$$

$$f(x+2) = [-\, cos(t)\, sin^{x+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (x+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)\, sin^x(t)\, dt$$

$$= (x+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - sin^2(t)\right) sin^x(t)\, dt = (x+1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^x(t)\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{x+2}(t)\, dt \right)$$

soit :

$$f(x+2) = (x+1)\,(f(x) - f(x+2))$$

D'où :

$$\boxed{f(x+2) = \frac{x+1}{x+2}\, f(x)}$$

4) Pour $x > 0$ on a :

$$h(x+1) = (x+1)\, f(x+1)\, f(x)$$

$$= (x+1)\, \frac{x}{x+1}\, f(x-1)\, f(x)$$

$$= x\, f(x-1)\, f(x) = h(x)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h(n) = h(1) = f(1) f(0)$$

Or :

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^0(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^1(t)\, dt = [-\, cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

D'où :

$$\boxed{h(n) = \frac{\pi}{2}}$$

5) On a en (-1) :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2) \sim \frac{1}{x+1} f(1) \sim \frac{1}{x+1}$$

6) Pour $x > 0$ on a :

$$f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$$

$$\frac{x}{x+1} f(x-1) \leq f(x) \leq f(x-1)$$

Or $f(x-1) > 0$ donc :

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{f(x)}{f(x-1)} \leq 1$$

Le théorème des gendarmes conduit alors en $+\infty$ à :

$$f(x) \sim f(x-1)$$

Donc à :

$$h(x) \sim x\left(f(x)\right)^2$$

Notons alors $n(x)$ la partie entière de x qui vérifie :

$$n(x) \leq x < n(x) + 1$$

Donc :

$$f(n(x)+2) \leq f(n(x)+1) < f(x) \leq f\big(n(x)\big)$$

Soit :

$$\frac{n(x)+1}{n(x)+2} f\big(n(x)\big) \leq f(x) \leq f\big(n(x)\big)$$

On en déduit :

$$f(x) \sim f\big(n(x)\big)$$

Or :

$$x \sim n(x)$$

$$f\big(n(x)\big) \sim f(n(x)-1)$$

$$n(x)\, f\big(n(x)\big)\, f(n(x)-1) = \frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$x\left(f(x)\right)^2 \sim \frac{\pi}{2}$$

Finalement :

$$\boxed{f(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,x}}}$$