Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante, où y désigne une fonction inconnue réelle d'une variable réelle dérivable :

$$\forall x \in I,\ 2x(1-x)y' + (1-x)y = 1 \qquad (1)$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Chercher les fonctions S développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation (1).

2) Chercher les solutions de l'équation (1) respectivement sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0,1[$, et $]1,+\infty[$.

3) Montrer qu'il existe une fonction f unique, définie sur l'intervalle $]-\infty,1[$, dérivable, et solution de l'équation différentielle (1).

4) Montrer que la fonction f déterminée à la question précédente est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-\infty,1[$.

Corrigé :

1) Soit $S(x)$ une fonction développable en série entière. Posons :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que S soit solution de (1) est :

$$\forall\, x \in I : \qquad 2\,x\,(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} + (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in I : \qquad 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in I : \qquad 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\, a_{n-1}\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\, x^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ 2\,a_1 + a_1 - a_0 = 0 \\ \forall\, n \geq 2 : 2\,n\,a_n - 2\,(n-1)\,a_{n-1} + a_n - a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \dfrac{1}{3} \\ \forall\, n \geq 2 : (2\,n+1)\,a_n = (2\,n-1)\,a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall\, n \geq 1 :\ a_n = \dfrac{2\,n-1}{2\,n+1}\ a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall\, n \geq 1 :\ a_n = \dfrac{2\,n-1}{2\,n+1}\,\dfrac{2\,n-3}{2\,n-1} \dots \dfrac{1}{3} a_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n = \frac{1}{2\,n+1}$$

Or la série de terme général ci-dessus vérifie :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2\,n+2} \times (2\,n+1)$$

soit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

D'après la règle de D'Alembert, son rayon de convergence est 1. Il n'y a donc qu'une solution de (1)développable en série entière au voisinage de 0 qui est la série de rayon de convergence 1 :

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2\,n+1}}$$

Cherchons alors une expression analytique de S. Pour cela posons pour $x > 0$ $y = \sqrt{x}$ soit $x = y^2$, alors :

$$S(x) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

Posons sur $[0,1[$:

$$k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2\,n+1}}{2\,n+1} = S(y^2)$$

k est dérivable sur $[0,1[$ par composition et :

$$k'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{2\,n} = \frac{1}{1-y^2}$$

Donc sur $[0,1[$ on a :

$$k(y) = k(0) + \int_0^y \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\, Ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

On en déduit sur $]0,1[$

$$\boxed{S(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} Ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)}$$

Faisons un même travail sur $]-1{,}0[$ en posant $y = \sqrt{-x}$, soit $x = -y^2$ alors :

$$S(x) = \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, y^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

Posons sur $[0{,}1[$:

$$g(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, y^{2\,n+1}}{2\,n+1} = S(y^2)$$

g est dérivable sur $[0{,}1[$ par composition et :

$$g'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n y^{2\,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-y^2)^n = \frac{1}{1+y^2}$$

Donc sur $[0{,}1[$ on a :

$$f(y) = f(0) + \int_0^y \frac{dt}{1+t^2} = tan^{-1}(y)$$

On en déduit sur $]-1{,}0[$

$$\boxed{S(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right)}$$

et on peut prolonger cette définition par continuité sur $]-1{,}0]$

2) Pour $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; 1[$ ou $I =]1; +\infty[$ on a :

$$(1) \Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : y' = -\frac{1}{2\,x}\, y + \frac{1}{2\,x\,(1-x)}$$

Nous sommes en présence d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre.

Pour $I =]0; 1[$ ou $I =]1; +\infty[$ la solution générale est de la forme :

$$y(x) = c\, e^{-\frac{1}{2}Ln(x)} + y_P(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} + y_P(x)$$

où c est une constante arbitraire et y_P une solution particulière, que nous allons déterminer par la méthode de la variation de la constante en posant :

$$y_P(x) = \frac{c(x)}{\sqrt{x}}$$

soit :

$$y_P'(x) = \frac{c'(x)\,\sqrt{x} - c(x)\,\frac{1}{2\,\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{c'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{c(x)}{2\,x\,\sqrt{x}}$$

Ainsi :

$$y_P \text{ solution de } (1)$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : \frac{c'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{c(x)}{2\,x\,\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\,x}\,\frac{c(x)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\,x\,(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : \frac{c'(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\,x\,(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : c'(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\frac{1}{\left(1-\left(\sqrt{x}\right)^2\right)}$$

Soit en posant : $u(x) = \sqrt{x}$

$$\forall\, x \in I : c'(x) = \frac{u'(x)}{1-\left(u(x)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : \ c(x) = \frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{1+u(x)}{1-u(x)}\right| + cte = \frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + cte$$

La fonction y_P suivante répond donc à la question :

$$y_P(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\ Ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|$$

La solution générale sur I est donc :

$$\boxed{y(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\ Ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|}$$

Pour $I =]-\infty; 0[$ la solution générale est de la forme :

$$y(x) = c\,e^{-\frac{1}{2}Ln(-x)} + y_P(x) = \frac{c}{\sqrt{-x}} + y_P(x)$$

où c est une constante arbitraire et y_P une solution particulière, que nous allons déterminer par la méthode de la variation de la constante en posant :

$$y_P(x) = \frac{c(x)}{\sqrt{-x}}$$

soit :

$$y'_P(x) = \frac{c'(x)\sqrt{-x} - c(x)\dfrac{(-1)}{2\sqrt{-x}}}{\left(\sqrt{-x}\right)^2} = \frac{c'(x)}{\sqrt{-x}} - \frac{c(x)}{2\,x\sqrt{-x}}$$

Ainsi :

$$y_P \text{ solution de } (1)$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I : \frac{c'(x)}{\sqrt{-x}} - \frac{c(x)}{2\,x\sqrt{-x}} = -\frac{1}{2\,x}\frac{c(x)}{\sqrt{-x}} + \frac{1}{2\,x\,(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I : \frac{c'(x)}{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2\,x\,(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I : c'(x) = \frac{(-1)}{2\sqrt{-x}}\frac{1}{(1+\left(\sqrt{-x}\right)^2)}$$

Soit en posant : $u(x) = \sqrt{-x}$

$$\forall\, x \in I : c'(x) = \frac{u'(x)}{1+\left(u(x)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I :\ c(x) = tan^{-1}\left(u(x)\right) + cte = tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right) + cte$$

La fonction y_P suivante répond donc à la question :

$$y_P(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}\ tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right)$$

La solution générale sur $]-\infty;0[$ est donc :

$$\boxed{y(x) = \frac{c}{\sqrt{-x}} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\ tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right)}$$

3) Notons qu'en faisant $x = 0$ dans l'équation (1) toute solution vérifie $y(0) = 1$. De plus elle vérifie d'après ce qui précède :

sur $]-\infty;0[$:

$$y(x) = \frac{c_1}{\sqrt{-x}} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\ tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right)$$

sur $]0;1[$:

$$y(x) = \frac{c_2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ Ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

Or :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{-x}} \; tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right) = 1$$

et en 0 :

$$\frac{1}{2\,t} \; Ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \sim \frac{1}{2\,t} \; \left(\frac{1+t}{1-t} - 1\right) \sim \frac{1}{2\,t} \; \frac{2\,t}{1-t} \sim \frac{1}{1-t}$$

Donc :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \; Ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = 1$$

La solution y devant avoir une limite à gauche et une limite à droite finie en 0, cela impose :

$$c_1 = c_2 = 0$$

D'où la solution unique sur $]-\infty; 1[$ définie par :

sur $]-\infty; 0[$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \; tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right)$$

sur $]0; 1[$:

$$f(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \; Ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

et :

$$y(0) = 1$$

4) L'étude faite au 1) a montré que que la solution précédente était développable en série entière sur $]-1; 1[$ donc C$^\infty$ sur ce même intervalle. Posons alors :

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \; tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right)$$

h est C$^\infty$ sur $]-\infty; 0[$ et coïncide avec f sur cet intervalle donc f est C$^\infty$ sur $]-\infty; -0{,}5[$ et donc sur $]-\infty; 1[$