Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note $M_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n.
On notera I_n la matrice unité et 0 la matrice nulle.
On notera $tr(M)$ la trace d'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ (somme des éléments de la diagonale principale), et $det(M)$ le déterminant de M.

1) Soit n un entier naturel non nul, et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la relation :

$$A^2 - 2A + 4I_n = 0 \qquad (1)$$

a) Montrer que l'entier n est nécessairement pair, et que la matrice A n'est pas proportionnelle à I_n.
b) On suppose que $n = 2$, et que A est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$.
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $tr(A)$ et $det(A)$ pour que la matrice A vérifie la relation (1).
Montrer qu'il existe une infinité de matrices A de $M_2(\mathbb{R})$ vérifiant la relation (1).

2) On considère la matrice A de $M_2(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -13 & -6 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

et la suite de matrices $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi définie :

$$U_0 = I_2 \ ; \ U_1 = A \ ; \ \ \forall k \geqslant 2, \ U_k = 2\ U_{k-1} - 4\ U_{k-2} \qquad (3)$$

a) Montrer que la matrice A vérifie la relation (1).
b) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, U_k = A^k \qquad (4)$$

3) On considère, pour tout entier naturel p, et pour tout réel x, la matrice :

$$M_p(x) = x^p\ U_p \qquad (5)$$

et $S_p(x)$ la matrice ainsi définie :

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} x^k\ U_k \qquad (6)$$

On admet qu'une suite de matrices $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $M_2(\mathbb{R})$ converge vers la matrice nulle lorsque l'entier p tend vers $+\infty$ si et seulement si les quatre termes de la matrice (T_p) tendent vers 0 lorsque l'entier p tend vers $+\infty$.
a) Montrer que pour tout réel x, la matrice $I_2 - xA$ est inversible, et déterminer son inverse sous la forme d'une combinaison linéaire de I_2 et A.
b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel x pour que la suite de matrices $(x^pU_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 lorsque l'entier p tend vers $+\infty$.
c) En déduire, lorsque cette condition est réalisée, que la suite $(S_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $(I - xA)^{-1}$ lorsque l'entier p tend vers $+\infty$.

<u>Corrigé</u> :

<u>Exercice 1 :</u>

1)

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre non nul associé, alors :

$$A\ X = \lambda\ X$$

$$A^2\ X = \lambda^2\ X$$

$$(A^2 - 2\ A + 4\ I_n)\ X = (\lambda^2 - 2\ \lambda + 4)\ X$$

Donc :

$$\lambda^2 - 2\ \lambda + 4 = 0$$

Le discriminant de ce trinôme est :

$$\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 < 0$$

donc $\lambda \notin \mathbb{R}$

Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A n'a donc pas de racines réelles. Il est donc de degré pair. Comme son degré est l'ordre de A, on en déduit que n est pair.

Prouvons par l'absurde que A n'est pas proportionnelle à I_n en supposant qu'il existe un réel k tel que : $A = k\, I_n$. Alors :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = (k^2 - 2\,k + 4)\,I_n$$

Donc :

$$k^2 - 2\,k + 4 = 0$$

Ce qui est absurde puisque ce trinôme n'a pas de racine réelle.

b) Montrons que l'on a :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0 \Leftrightarrow\ P_A(X) = X^2 - 2\,X + 4$$

$(\Rightarrow)$ Supposons $A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0$ alors $X^2 - 2\,X + 4$ est un polynôme annulateur de

A et comme il n'existe pas de polynôme annulateur de plus bas degré, c'est le polynôme minimal $m_A(X)$ de A. $P_A(X)$ qui est un multiple de $m_A(X)$ et de coefficient dominant égal à 1 est donc égal à $m_A(X)$

$(\Leftarrow)$ Supposons $P_A(X) = X^2 - 2\,X + 4$ alors d'après le théorème de Cayley Hamilton :

$$P_A(A) = 0$$

donc :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0$$

De plus, on a :

$$P_A(X) = X^2 - Tr(A)\,X + \det\,(A)$$

D'où :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0 \Leftrightarrow\ Tr(A) = 2, \det(A) = 4$$

Considérons des matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & 2-a \end{pmatrix}$$

Elles ont une trace égale à 2. On a alors :

$$det(A) = 4 \Leftrightarrow -\,a^2 + 2\,a - b\,c - 4 = 0$$

Le trinôme en a a pour discriminant :

$$\Delta = 4 - 4\,(b\,c + 4) = 4\,(-\,b\,c - 3)$$

Prenons alors $c = -1$ et $b > 3$, le discriminant est alors strictement positif et le trinôme a au moins une racine réelle a. Il y a donc une infinité de matrices vérifiant (1)

2)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -13 & -6 \end{pmatrix}$$

a) $Tr(A) = 8 - 6 = 2,\ det(A) = -48 + 52 = 4$

b) Montrons par une récurrence forte sur k :

$$P(k) = "\ U_k = A^k\ "$$

<u>Initialisation</u> pour $k = 0$ et $k = 1$

$$U_0 = I_2$$

$$A^0 = I_2$$

$$U_1 = A$$

$$A^1 = A$$

Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies

<u>Hérédité</u> : Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1 tel que $P(q)$ soit vraie pour tout entier naturel q inférieur ou égal à k alors :

$$U_{k+1} = 2\,U_k - 4\,U_{k-1} = 2\,A^k - 4\,A^{k-1} = (2\,A - 4\,I_2)\,A^{k-1} = A^2\,A^{k-1} = A^{k+1}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, ce qui démontre la propriété pour tout entier naturel k

3)

$$M_p(x) = x^p\,U_p\ \ ,\ \ S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} x^k\,U_k$$

a) On a pour tout couple de réels (y, z)

$$(I_2 - x\,A)\,(y + z\,A) = y\,I_2 + (z - x\,y)\,A - x\,z\,A^2$$

$$= y\,I_2 + (z - x\,y)\,A - x\,z\,(2\,A - 4\,I_2)$$

$$= (y + 4\,x\,z)\,I_2 + (z - x\,y - 2\,x\,z)\,A$$

Montrons alors qu'on peut déterminer ce couple tel que :

$$\begin{cases} y + 4\,x\,z = 1 \\ z - x\,y - 2\,x\,z = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} y = 1 - 4\,x\,z \\ z - x\,(1 - 4\,x\,z) - 2\,x\,z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 4\,x\,z \\ z\,(4\,x^2 - 2\,x + 1) = x \end{cases}$$

Or le trinôme $4\,x^2 - 2\,x + 1$ a un discriminant strictement négatif donc ne s'annule pas. Le système équivaut donc à :

$$\begin{cases} y = 1 - \dfrac{4\,x^2}{4\,x^2 - 2\,x + 1} = \dfrac{-2\,x + 1}{4\,x^2 - 2\,x + 1} \\ z = \dfrac{x}{4\,x^2 - 2\,x + 1} \end{cases}$$

Ceci prouve que la matrice $I_2 - x\,A$ est inversible et que son inverse est :

$$(I_2 - x\,A)^{-1} = \frac{-2\,x + 1}{4\,x^2 - 2\,x + 1}\ I_2 + \frac{x}{4\,x^2 - 2\,x + 1}\ A$$

b) Déterminons, pour la relation de récurrence (3) les solutions de la forme :

$$U_k = r^k\,I_2$$

en écrivant pour tout entier naturel $k \geq 2$:

$$r^k\,I_2 = 2\,r^{k-1}\,I_2 - 4\,r^{k-2} I_2$$

Ce qui équivaut, après division par r^{k-2} et élimination de I_2 à :

$$r^2 = 2\,r - 4$$

soit :

$$r^2 - 2\,r + 4 = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 4 - 16 = -12 = \left(2\,i\,\sqrt{3}\right)^2$$

Il y a donc deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{2 - 2\,i\,\sqrt{3}}{2} = 2\,\frac{1 - \ i\,\sqrt{3}}{2} = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$r_2 = \frac{2 + 2\,i\,\sqrt{3}}{2} = 2\,\frac{1 + \ i\,\sqrt{3}}{2} = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

La solution générale de l'équation (3) est donc :

$$U_k = {r_1}^k\,B + {r_2}^k\,C$$

où B et C sont deux matrices définies par le système :

$$\begin{cases} B + C = I_2 \\ r_1\,B + r_2\,C = A \end{cases}$$

qui se résout par combinaison en :

$$\begin{cases} B = \dfrac{1}{r_1 - r_2}(A - r_2 I_2) \\ C = \dfrac{1}{r_2 - r_1}(A - r_1 I_2) \end{cases}$$

Ainsi :

$$x^k\, U_k = (2\,x)^k \left(e^{-i\,k\frac{\pi}{3}}\, B + e^{i\,k\frac{\pi}{3}}\, C\right)$$

Posons : $D_k = e^{-i\,k\frac{\pi}{3}}\, B + e^{i\,k\frac{\pi}{3}}\, C$

Les quatre coefficients de D_k sont bornés. Une condition suffisante de convergence vers 0 de $x^k\, U_k$ est donc :

$$|2\,x| < 1$$

soit

$$|x| < \frac{1}{2}$$

Et elle est nécessaire. En effet :

Si $x^k\, U_k$ tend vers 0 alors la suite extraite $x^{6\,k}\, U_{6k}$ tend vers 0. Or :

$$x^{6\,k}\, U_{6k} = (2\,x)^{6\,k}\,(B + C)$$

et $B + C$ n'est pas la matrice nulle

donc $(2\,x)^{6\,k}$ tend vers 0 d'où la condition précédente.

c) On a

$$(I_2 - x\,A)\, S_p(x) = I_2 - x^{p+1}\, A^{p+1} = I_2 - U_{p+1}$$

D'où :

$$S_p(x) = (I_2 - x\,A)^{-1} - (I_2 - x\,A)^{-1} U_{p+1}$$

La suite U_{p+1} tendant vers 0 quand p tend vers l'infini, il est aisé de vérifier que son produit à gauche ou à droite par une matrice constante tend aussi vers 0 et donc que $(I_2 - x\,A)^{-1} U_{p+1}$ tend vers 0. Ainsi $S_p(x)$ tend vers $(I_2 - x\,A)^{-1}$. On peut alors écrire ceci sous une forme analogue à celle pour la somme des termes d'une suite géométrique de réels :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\, A^k = (I_2 - x\,A)^{-1}$$