Exercice 3 *Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé Oxy.*

1) On considère la courbe (C) d'équation cartésienne :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

où a est un réel strictement positif.
Préciser la nature de la courbe (C).
Tracer la courbe (C).

2) a) Déterminer une équation polaire de la courbe (C) sous la forme :

$$\rho = f(\theta)$$

où f est une fonction que l'on déterminera.
On précisera l'ensemble de définition de f.
b) Soit (D) l'ensemble des projections orthogonales du point O sur les tangentes à la courbe (C).
Déterminer une équation polaire de la courbe (D).
Etudier et tracer la courbe (D).

3) Montrer qu'il existe un réel b strictement positif, que l'on calculera en fonction de a, tel que, étant donné les points $A(-b, 0)$ et $B(b, 0)$, la courbe (D) est l'ensemble des points M du plan tel que le produit des distances $MA \times MB$ est égal à une constante réelle que l'on précisera.

<u>Corrigé</u> :

1) L'équation se met sous forme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec : $a = b$

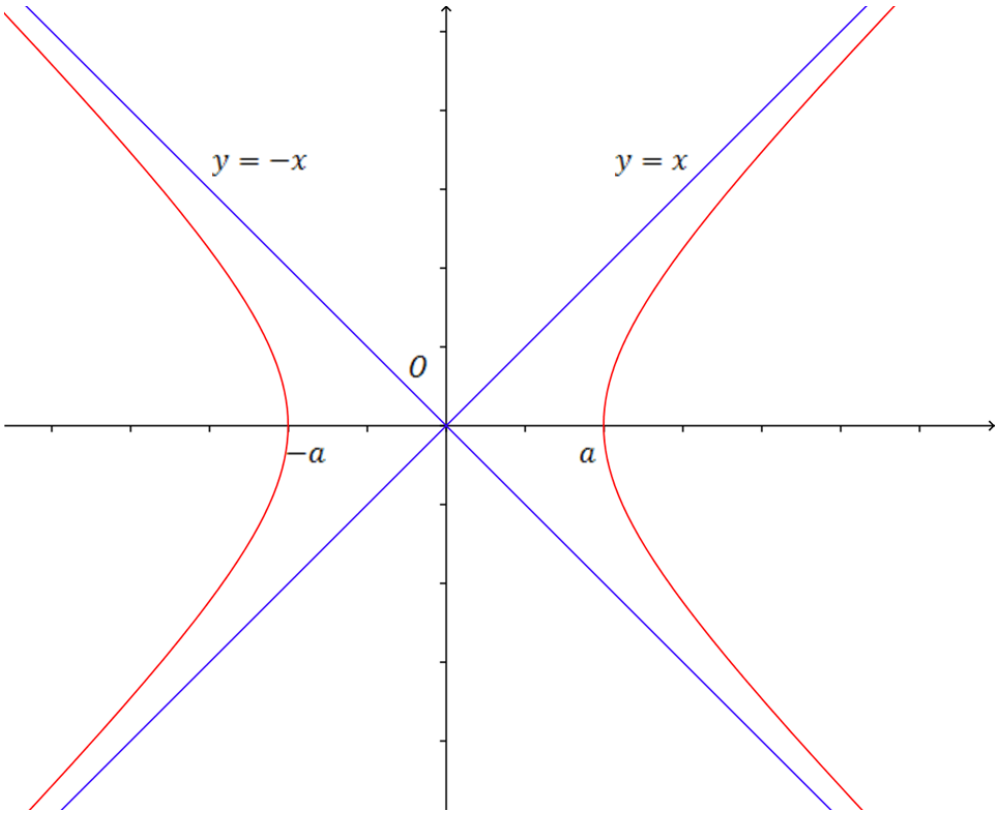
Il s'agit d'une hyperbole équilatère d'asymptotes les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$

Le tracé s'obtient en étudiant sur $[a; +\infty[$ la courbe :

$$y = \sqrt{x^2 - a^2}$$

et en effectuant les symétries de centre O et d'axe (O, y)

L'allure de la courbe est la suivante :



2)

a) Tout point $M(x, y)$ de l'hyperbole peut être décrit par un jeu de coordonnées (ρ, θ) (non nécessairement polaires, car ρ peut être choisi négatif) tels que :

$$\begin{cases} x = \rho\, cos(\theta) \\ y = \rho\, sin(\theta) \end{cases}$$

avec :

$$\rho \in \mathbb{R}, \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

On a alors :

$$M(\rho, \theta) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \rho^2\, cos^2(\theta) - \rho^2\, sin^2(\theta) = a^2$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 \left(cos^2(\theta) - sin^2(\theta)\right) = a^2$$
$$\Leftrightarrow \rho^2\, cos(2\theta) = a^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \dfrac{a^2}{cos(2\theta)} \\ cos(2\theta) > 0 \end{cases}$$

A ce stade, si on se limite à un jeu de coordonnées polaires, pour lesquelles $\rho \geq 0$ le système ci-dessus équivaut au suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \dfrac{a}{\sqrt{cos(2\theta)}} \\ \exists\, k \in \mathbb{Z} : \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4} + k\,\pi; \dfrac{\pi}{4} + k\,\pi\right[\end{cases}$$

Une équation polaire de $(\mathcal{C})$ est donc :

$$\rho = f(\theta)$$

avec :

$$\boxed{f(\theta) = \frac{a}{\sqrt{cos(2\theta)}}}$$

et :

$$\boxed{D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\,\pi; \frac{\pi}{4} + k\,\pi\right[}$$

Notons alors que l'on a :

$$f(\theta + 2\,\pi) = f(\theta)$$

ce qui traduit :

$$M(\rho, \theta) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow M(\rho, \theta + 2\,\pi) \in (\mathcal{C})$$

On peut donc se limiter à l'étude de la courbe sur un intervalle de longueur $2\,\pi$

$$f(\theta + \pi) = f(\theta)$$

ce qui traduit :

$$M(\rho, \theta) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow M(\rho, \theta + \pi) \in (\mathcal{C})$$

à savoir la symétrie de la courbe par rapport à O. Il suffit donc d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur π, par exemple :

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Et compte tenu du domaine de définition :

$$\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$$

Mais on a également :

$$f(-\theta) = f(\theta)$$

ce qui traduit :

$$M(\rho, \theta) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow M(\rho, -\theta) \in (\mathcal{C})$$

à savoir la symétrie de la courbe par rapport à l'axe (O, x). Il suffit donc d'étudier la courbe sur un l'intervalle :

$$\left[0; \frac{\pi}{4}\right[$$

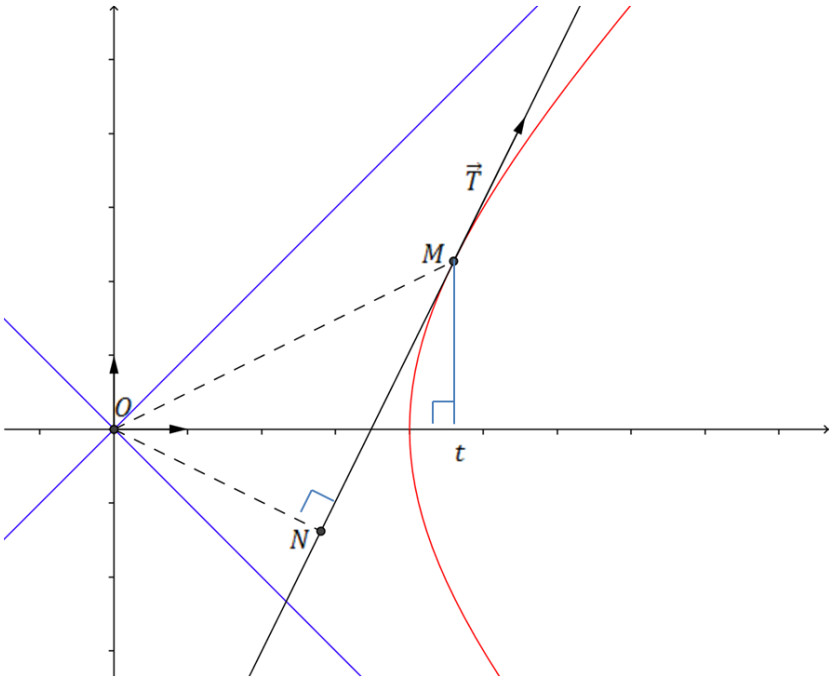
La portion de courbe $(\mathcal{C}_1)$ représentée est alors celle contenue dans le domaine $x \geq 0$ et $y \geq 0$

b)

Considérons pour la portion de courbe $(\mathcal{C}_1)$ un paramétrage cartésien par l'abscisse :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t^2 - a^2} \end{cases}$$

avec : $t \in [a; +\infty[$



Un vecteur tangent au point M de paramètre t est alors dans la base du repère :

$$\vec{T}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - a^2}} \end{pmatrix}$$

Il est colinéaire à :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} \sqrt{t^2 - a^2} \\ t \end{pmatrix}$$

Le projeté orthogonal N de O sur $(M, \vec{T})$ est alors donné par la relation :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{MO} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\ \vec{w}$$

Soit :

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\ \vec{w}$$

Or :

$$\begin{cases} \|\vec{w}\|^2 = 2\ t^2 - a^2 \\ \overrightarrow{OM} \cdot \vec{w} = 2\ t\ \sqrt{t^2 - a^2} \end{cases}$$

Les coordonnées cartésiennes de N sont donc :

$$\begin{cases} x_N = t - \dfrac{2\ t\ \sqrt{t^2 - a^2}}{2\ t^2 - a^2}\ \sqrt{t^2 - a^2} = \dfrac{a^2\ t}{2\ t^2 - a^2} \\ y_N = \sqrt{t^2 - a^2} - \dfrac{2\ t\ \sqrt{t^2 - a^2}}{2\ t^2 - a^2}\ t = -\dfrac{a^2\ \sqrt{t^2 - a^2}}{2\ t^2 - a^2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\rho_N = \left\|\overrightarrow{ON}\right\| = \frac{a^2}{2\ t^2 - a^2}\ \sqrt{t^2 + t^2 - a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{2\ t^2 - a^2}}$$

Posons : $\theta_N = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{ON}\right)$ alors :

$$\begin{cases} cos(\theta_N) = \dfrac{x_N}{\rho_N} = \dfrac{a^2\ t}{2\ t^2 - a^2}\ \dfrac{\sqrt{2\ t^2 - a^2}}{a^2} = \dfrac{t}{\sqrt{2\ t^2 - a^2}} = g(t) \\ sin(\theta_N) = \dfrac{y_N}{\rho_N} = -\dfrac{a^2\ \sqrt{t^2 - a^2}}{2\ t^2 - a^2}\ \dfrac{\sqrt{2\ t^2 - a^2}}{a^2} = -\dfrac{\sqrt{t^2 - a^2}}{\sqrt{2\ t^2 - a^2}} = h(t) \end{cases}$$

Ainsi :

$$tan(\theta_N) = -\frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{t}$$

Soit :

$$t\ tan(\theta_N) = -\sqrt{t^2 - a^2}$$

$$t^2\ tan^2(\theta_N) = t^2 - a^2$$

$$t^2 = \frac{a^2}{1 - tan^2(\theta_N)}$$

$$2\ t^2 - a^2 = \frac{2\ a^2}{1 - tan^2(\theta_N)} - a^2 = a^2\ \frac{1 + tan^2(\theta_N)}{1 - tan^2(\theta_N)} = a^2\ \frac{cos^2(\theta_N) + sin^2(\theta_N)}{cos^2(\theta_N) - sin^2(\theta_N)}$$

$$= \frac{a^2}{cos(2\,\theta_N)}$$

donc :

$$\rho_N = \frac{a^2}{\frac{a}{\sqrt{cos(2\,\theta_N)}}} = a\,\sqrt{cos(2\,\theta_N)}$$

Etudions maintenant $g(t)$ et $h(t)$ afin de déterminer le domaine décrit par θ_N

$$g(t) = \frac{t}{\sqrt{2\,t^2 - a^2}}$$

$$g'(t) = \frac{1 - t\,\frac{4\,t}{2\,\sqrt{2\,t^2 - a^2}}}{2\,t^2 - a^2} = -\frac{a^2}{(2\,t^2 - a^2)\,\sqrt{2\,t^2 - a^2}} < 0$$

Donc g est strictement décroissante. De plus :

$$g(a) = 1$$

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$g([a; +\infty[\,) = \left]\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$$

$$h(t) = -\frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{\sqrt{2\,t^2 - a^2}} = -\sqrt{\frac{t^2 - a^2}{2\,t^2 - a^2}}$$

h a les variations opposées à :

$$k(t) = \frac{t^2 - a^2}{2\,t^2 - a^2}$$

et :

$$k'(t) = \frac{2\,t\,(2\,t^2 - a^2) - 4\,t\,(t^2 - a^2)}{(2\,t^2 - a^2)^2} = \frac{2\,a^2\,t}{(2\,t^2 - a^2)^2} > 0$$

donc k est strictement croissante et h strictement décroissante. De plus :

$$h(a) = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$h([a;+\infty[\,) = \left]-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right]$$

Donc, quand le paramètre t décrit $[a;+\infty[$ θ_N décrit (à une translation de $2\,\pi$) près continument l'intervalle :

$$\left]-\frac{\pi}{4};0\right]$$

Finalement, la portion de courbe associée à $(\mathcal{C}_1)$ peut être décrite par l'équation polaire:

$$\rho = a\sqrt{cos(2\,\theta)}\quad ,\theta \in \left]-\frac{\pi}{4};0\right]$$

En notant que la fonction de θ ci-dessus est invariante par changement de θ en $-\theta$ et en $\theta+\pi$, on peut décrire l'ensemble de la courbe $\mathfrak{D}$ par l'équation polaire :

$$\boxed{\rho = a\sqrt{cos(2\,\theta)}\quad ,\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4}+k\,\pi\,;\frac{\pi}{4}+k\,\pi\right[}$$

Etudions cette courbe sur $\left]-\frac{\pi}{4};0\right]$:

$$\rho' = a\,\frac{-2\,sin(2\,\theta)}{\sqrt{cos(2\,\theta)}} \geq 0$$

ρ' ne s'annulant qu'en 0, ρ est strictement croissante.

Posons :

$$\vec{u}(\theta) = cos(\theta)\,\vec{\imath} + sin(\theta)\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{v}(\theta) = -sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath}$$

La tangente au point N a pour vecteur directeur :

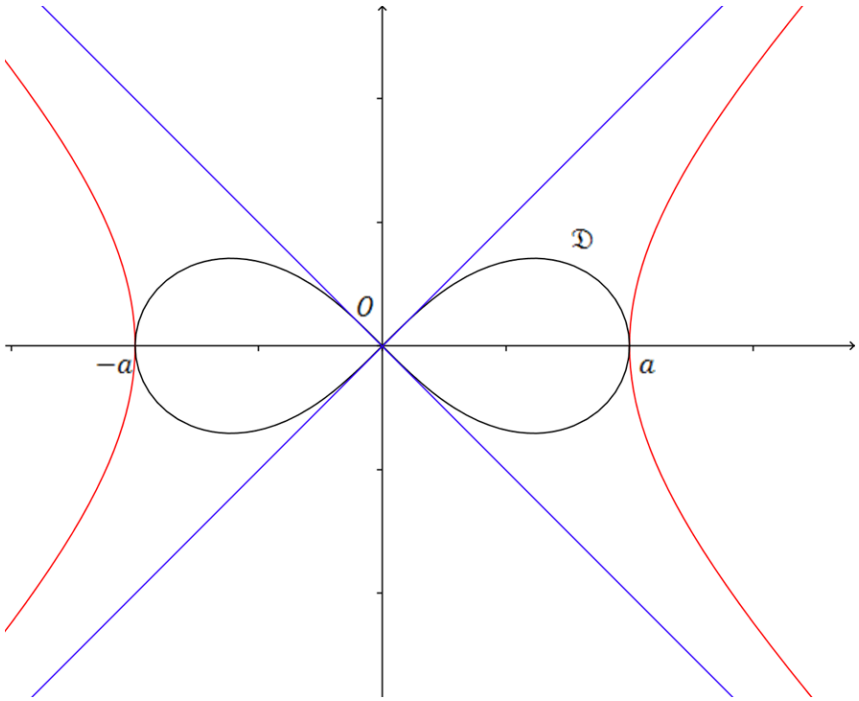
$$\vec{T}(\theta) = \rho'\,\vec{u}(\theta) + \rho\;\;\vec{v}(\theta)$$

Soit en 0 :

$$\vec{T}(0) = a\;\;\vec{v}(0) = a\,\vec{\jmath}$$

En $-\frac{\pi}{4}$ la courbe est prolongeable du point O par continuité. Le prolongement présente un point stationnaire en $(\rho' = \rho = 0)$. La tangente en ce point a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. C'est donc la droite d'équation $y = -x$

Pour obtenir la courbe complète, on procède à une symétrie de centre O et une symétrie d'axe (O,x)



3)

Soit M un point de $\mathfrak{D}$ de coordonnées polaires (ρ, θ) alors :

$$MA^2 = (\rho\, cos(\theta) - b)^2 + \left(\rho\, sin(\theta)\right)^2 = \rho^2 - 2\,\rho\, b\, cos(\theta) + b^2$$

$$MB^2 = \rho^2 + 2\,\rho\, b\, cos(\theta) + b^2$$

$$\begin{aligned} MA^2 \times MB^2 &= \left(\rho^2 + b^2 - 2\,\rho\, b\, cos(\theta)\right)\left(\rho^2 + b^2 + 2\,\rho\, b\, cos(\theta)\right) \\ &= (\rho^2 + b^2)^2 - 4\,\rho^2 b^2\, cos^2(\theta) \\ &= \rho^4 + 2\,\rho^2 b^2 + b^4 - 4\,\rho^2 b^2\, cos^2(\theta) \\ &= \rho^4 + 2\,\rho^2 b^2 + b^4 - 2\,\rho^2 b^2\left(1 + cos(2\theta)\right) \\ &= \rho^4 + b^4 - 2\,\rho^2 b^2 cos(2\theta) \\ &= \rho^2\left(\rho^2 - 2\,b^2 cos(2\theta)\right) + b^4 \end{aligned}$$

Ainsi , une condition suffisante pour que $MA \times MB$ ne dépende pas de θ est :

$$\rho^2 = 2\,b^2 cos(2\theta)$$

et elle est obtenue en prenant :

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

On a donc :

$$M \in \mathfrak{D} \Rightarrow MA \times MB = \frac{a^2}{2}$$

Réciproquement : Soit les points :

$$A\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},0\right), \qquad B\left(\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$$

et M un point tel que :

$$MA \times MB = \frac{a^2}{2}$$

alors d'après ce qui précède :

$$MA^2 \times MB^2 = \rho^2\left(\rho^2 - a^2cos(2\theta)\right) + \frac{a^4}{4}$$

Donc :

$$\rho^2\left(\rho^2 - a^2cos(2\theta)\right) + \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{4}$$

$$\rho^2\left(\rho^2 - a^2cos(2\theta)\right) = 0$$

$$\rho^2 = 0 \;\; ou \;\; \rho^2 - a^2cos(2\theta) = 0$$

$$\rho = 0 \;\; ou \;\; \rho = a\sqrt{cos(2\theta)}$$

Ainsi :

$$MA \times MB = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \; M \in \mathfrak{D}$$

D'où, en désignant par $\mathcal{P}$ le plan de la courbe :

$$\boxed{\mathfrak{D} = \left\{M \in \mathcal{P} : \; MA \times MB = \frac{a^2}{2}\right\}}$$