Enoncé :

On considère une équation différentielle linéaire du second ordre homogène et normalisée de la forme :

$$y'' = a(x)\, y' + b(x)\, y \qquad (E)$$

Où a et b sont deux fonctions continues sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$

Soit (f_1, f_2) un couple de solutions de (E) sur I. On définit sur I le wronskien de ce couple, comme étant la fonction :

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{vmatrix} = f_1(x)\, f'_2(x) - f'_1(x)\, f_2(x)$$

a) Déterminer une équation différentielle vérifiée par W sur I.

b) Résoudre l'équation différentielle précédente et en déduire que le wronskien est soit identiquement nul sur I, soit ne s'y annule pas.

c) On suppose que le wronskien du couple de solutions ne s'annule pas sur I. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ solution de } (E) \text{sur } I \Leftrightarrow \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ \forall\, x \in I : f(x) = \lambda\, f_1(x) + \ \mu\, f_2(x)$$

Conseil : On pourra partir de la proposition de droite et faire apparaitre un système de deux équations que l'on cherchera à résoudre en λ et μ

d) Application : On considère l'équation différentielle

$$y'' = x\, y' - 2\, y \qquad (E)$$

- Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont développables en séries entières.

- Déterminer une équation différentielle du 1er ordre vérifiée par la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les conditions $y(0) = 0, y'(0) = -1$

- Cette équation différentielle peut elle être résolue de façon analytique ?

Solution :

a) Calculons la dérivée du wronskien :

$$W'(x) = f'_1(x)\, f'_2(x) + f_1(x)\, f''_2(x) - f''_1(x)\, f_2(x) - f'_1(x)\, f'_2(x)$$

$$= f_1(x)\, f''_2(x) - f''_1(x)\, f_2(x)$$

$$= f_1(x)\ \big(a(x)\, f'_2(x) + b(x)\, f_2(x)\big) - \big(a(x)\, f'_1(x) + b(x)\, f_1(x)\big)\ f_2(x)$$

$$= a(x)\, \big(f_1(x)\, f'_2(x) - f'_1(x)\, f_2(x)\big)$$

$$= a(x)\, W(x)$$

Donc W est solution sur I de l'équation différentielle du 1[er] ordre :

$$y' = a(x)\, y$$

Dont les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \to c\, e^{A(x)}$$

c étant une constante arbitraire et A une primitive de a sur I. Ainsi W est soit identiquement nulle sur I, soit ne s'annule pas.

c) Posons $W(x) = c\, e^{A(x)}, c \neq 0$ alors

$$\exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ \forall\, x \in I : f(x) = \lambda\, f_1(x) +\ \mu\, f_2(x)$$

$$\Leftrightarrow\ \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ \forall\, x \in I : \begin{cases} f(x) = \lambda\, f_1(x) +\ \mu\, f_2(x) \\ f'(x) = \lambda\, f'_1(x) +\ \mu\, f'_2(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ \forall\, x \in I :\ \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ \forall\, x \in I :\ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ \forall\, x \in I :\ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} f'_2(x) & -f_2(x) \\ -f'_1(x) & f_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ \forall\, x \in I : \begin{cases} \lambda = \dfrac{f'_2(x)\, f(x) -\ f_2(x)\, f'(x)}{c\, e^{A(x)}} \\ \mu = \dfrac{-f'_1(x)\, f(x) +\ f_1(x)\, f'(x)}{c\, e^{A(x)}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ \forall\, x \in I : \begin{cases} \lambda\, c =\ \left(f'_2(x)\, f(x) -\ f_2(x)\, f'(x)\right) e^{-A(x)} \\ \mu\, c =\ \left(-f'_1(x)\, f(x) +\ f_1(x)\, f'(x)\right) e^{-A(x)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I : \begin{cases} \left(\left(f'_2(x)\, f(x) -\ f_2(x)\, f'(x)\right)\, e^{-A(x)}\right)' = 0 \\ \left(\left(-f'_1(x)\, f(x) +\ f_1(x)\, f'(x)\right)\, e^{-A(x)}\right)' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I : \begin{cases} \left(f''_2(x)\, f(x) -\ f_2(x)\, f''(x) - a(x)\left(f'_2(x)\, f(x) -\ f_2(x)\, f'(x)\right)\right)\, e^{-A(x)} = 0 \\ \left(-f''_1(x)\, f(x) +\ f_1(x)\, f''(x) - a(x)\ \left(-f'_1(x)\, f(x) +\ f_1(x)\, f'(x)\right)\right)\, e^{-A(x)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I : \begin{cases} \left(f''_2(x) - a(x)\, f'_2(x)\right)\, f(x) -\ f_2(x)\left(f''(x) - a(x)\, f'(x)\right)\ = 0 \\ -\, f(x)\ \left(f''_1(x) - a(x)\, f'_1(x)\right) +\ f_1(x)\left(f''(x) - a(x)\, f'(x)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I : \begin{cases} b(x)\, f_2(x)\, f(x) -\ f_2(x)\left(f''(x) - a(x)\, f'(x)\right)\ = 0 \\ -\, f(x)\, b(x)\, f_1(x) +\ f_1(x)\left(f''(x) - a(x)\, f'(x)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I : \begin{cases} -\, f_2(x)\left(f''(x) - a(x)\, f'(x) - b(x)\, f(x)\right)\ = 0 & (1) \\ f_1(x)\left(f''(x) - a(x)\, f'(x) - b(x)\, f(x)\right) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : W(x)\left(f''(x) - a(x)\, f'(x) - b(x)\, f(x)\right) \ = 0 \quad (1) \times f'_1(x) + (2) \times f'_2(x)$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : f''(x) - a(x)\, f'(x) - b(x)\, f(x) \ = 0$$

d) Cherchons les solutions développables en séries entières donc de la forme :

$$f(x) \ = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

et donc telles que :

$$f'(x) \ = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

$$f''(x) \ = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2}$$

Alors f est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la série qui la définit est de rayon de convergence infini et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1) a_n\, x^{n-2} = x \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\,(n+1) a_{n+2}\, x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-2)\, a_n\, x^n - 2\, a_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\, a_2 = -2\, a_0 \\ \forall\, n \geq 2 : \ (n+2)\,(n+1) a_{n+2} = (n-2)\, a_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -a_0 \\ \forall\, n \geq 2 : \ a_{n+2} = \dfrac{(n-2)}{(n+2)\,(n+1)}\, a_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -a_0 \\ \forall\, p \geq 1 : \ a_{2p+2} = 0, \qquad a_{2p+3} = \dfrac{(2\,p-1)}{(2\,p+3)\,(2\,p+2)}\, a_{2\,p+1} \end{cases}$$

Le système précédent définit alors le terme général d'une série entière dont le rayon de convergence peut être obtenu en considérant, pour $r > 0$ la série :

$$\sum_{p=0}^{N} a_{2\,p+1}\, r^{2\,p+1}$$

qui est absolument convergente comme le montre la règle de D'alembert :

$$\frac{\left|a_{2\,p+3}\, r^{2\,p+3}\right|}{\left|a_{2\,p+1}\, r^{2\,p+1}\right|} = \frac{(2\,p-1)\, r^2}{(2\,p+3)\,(2\,p+2)} \sim \frac{r^2}{2\,p} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or la relation de récurrence définissant les termes de la série conduisent à exprimer pour tout p entier naturel, le terme $a_{2\,p+1}$ sous une forme :

$$a_{2\,p+1} = \varphi(p)\, a_1$$

Les solutions développables en série entières sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions définies par :

$$f(x) = a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi(p)\, x^{2\,p+1} + a_2\,(x^2-1), \qquad (a_1,\, a_2) \in \mathbb{R}^2$$

Posons :

$$f_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi(p)\, x^{2\,p+1}, \quad f_2(x) = x^2 - 1$$

Et calculons le wronskien de ces deux fonctions sur $\mathbb{R}$

$$W(x) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \varphi(p)\, x^{2\,p+1}\right) 2\,x - (x^2-1) \sum_{p=0}^{+\infty} (2\,p+1)\, \varphi(p)\, x^{2\,p}$$

En particulier, pour $x = 1$ nous avons :

$$W(1) = 2\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \varphi(p)\right)$$

Or les termes $\varphi(p)$ sont tous strictement négatifs donc :

$$W(1) < 0$$

Le wronskien n'est donc pas identiquement nul sur $\mathbb{R}$. On en déduit que le couple (f_1, f_2) forme une base de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E). Ces solutions sont donc développables en série entière sur $\mathbb{R}$

Le wronskien de la solution $f_2 : x \to x^2 - 1$ et de la solution y vérifiant $y(0) = 0, y'(0) = -1$ est :

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 - 1 & y \\ 2\,x & y' \end{vmatrix} = (x^2-1)\, y' - 2\,x\,y$$

Or nous avons vu qu'il vérifiait sur $\mathbb{R}$:

$$W'(x) = x\, W(x)$$

Donc :

$$W(x) = c\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

Où :

$$c = W(0) = -y'(0) = 1$$

Donc :

$$(x^2-1)\, y' - 2\,x\,y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

Tentons de résoudre cette équation sur $]1, +\infty[$ en la mettant sous forme normalisée :

$$y' - \frac{2\,x}{x^2-1}\,y = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2-1}$$

L'équation homogène associée se résout aisément et conduit à :

$$y = K\,e^{Ln(x^2-1)} = K\,(x^2-1), \qquad K \in \mathbb{R}$$

Pour trouver une solution particulière, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant :

$$y_P = K(x)(x^2-1), \qquad y'_P = K'(x)(x^2-1) + 2\,x\,K(x)$$

Soit, en l'injectant dans l'équation :

$$K'(x)(x^2-1) + 2\,x\,K(x) - \frac{2\,x}{x^2-1}\,K(x)(x^2-1) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2-1}$$

Finalement :

$$K'(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{(x^2-1)^2}$$

On ne peut cependant pas trouver de primitive analytique au second membre donc l'équation ne peut pas être résolue de façon analytique.